Esercitazione del 10 aprile 2008

Esercizio 0.1 *Calcolare il gradiente* ∇f *delle seguenti funzioni, specificando dove esiste*

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 3x^2y + 3y^3 + \tfrac{3x}{1+y^2} \\ f_2(x,y) &= xe^{y^2} + y\log(xy) \\ f_3(x,y) &= e^{\sin y} + y^2\log(x). \end{aligned}$$

Esercizio 0.2 *Sia data la funzione* $f(x,y) = 2y + xy - x^2 - y^2$.

(i) *Calcolare* $\nabla f(x,y)$.

(ii) *Calcolare* $\frac{\partial f}{\partial \nu}(-1,3)$ *quando* $\nu = \nu_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ *e quando* $\nu = \nu_2 = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$.

(iii) *Calcolare l'equazione del piano tangente nel punto* $(1,-1,f(1,-1))$.

Esercizio 0.3 *Data la funzione* $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy - 4$,

(i) *Calcolate, se esiste,* $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} f$*; nel caso non esista, motivare perchè.*

(ii) *Calcolare* ∇f*, il gradiente di* f.

(iii) *Calcolare la derivata direzionale di* f *nel punto* $(-1,1)$ *rispetto alla direzione* $(-1/2, \sqrt{3}/2)$.

(iv) *Calcolare l'equazione del piano tangente a* f *nel punto* $(-1,1,f(-1,1))$.

Esercizio 0.4 *Siano dati gli insiemi*

$$\begin{aligned} A_1(x,y) &= \{(x,y \in \mathbb{R}^2) \ : \ y-x<1\} \\ A_2(x,y) &= \{(x,y \in \mathbb{R}^2) \ : \ y>0\} \\ A_3(x,y) &= \{(x,y \in \mathbb{R}^2) \ : \ x-1<0\}. \end{aligned}$$

(i) Rappresentare graficamente $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

(ii) $\mathcal{C}A = \{(x,y \in \mathbb{R}^2) \ : \ y-x \geq 1\} \cup \{(x,y \in \mathbb{R}^2) \ : \ y \leq 0\} \cup \{(x,y \in \mathbb{R}^2) \ : \ x \geq 1\}$. *(vero o falso?)*

(iii) $\partial\mathcal{C}A = \{(1,t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in [0,2]\} \cup \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in [-1,1]\} \cup \{(t,t+1) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in [0,1]\}$. *(vero o falso?)*

(iv) A *è chiuso. (vero o falso?)*

(v) A *è aperto. (vero o falso?)*

(vi) $A \cup \partial\mathcal{C}A$ *è chiuso. (vero o falso?)*

Soluzioni

Soluzione esercizio 0.1

(i) $\nabla f_1(x,y) = \left(6xy + \dfrac{3}{1+y^2},\, 3x^2 + 9y^2 - \dfrac{6xy}{(1+y^2)^2}\right)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(ii) $\nabla f_2(x,y) = \left(e^{y^2} + \dfrac{y}{x},\, 2xye^{y^2} + \log(xy) + 1\right)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $xy > 0$;

(iii) $\nabla f_3(x,y) = \left(\dfrac{y^2}{x},\, \cos(y)e^{\sin(y)} + 2y\log(x)\right)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x > 0$.

Soluzione esercizio 0.2

(i) $\nabla f(x,y) = (y - 2x,\, 2 + x - 2y)$.

(ii) $\nabla f(-1,3) = (5,-5)$, e quindi

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial \nu_1}(-1,3) &= \langle \nabla f(-1,3), (\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2})\rangle = 0 \\ \tfrac{\partial f}{\partial \nu_2}(-1,3) &= \langle \nabla f(-1,3), (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2})\rangle = -\tfrac{5}{2}(1+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Oppure si può usare direttamente la definizione, ad esempio nel caso $\nu_1 = (a,b) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \nu_1}(-1,3) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(-1+at, 3+bt) - f(-1,3)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{2(3+bt) + (-1+at)(3+bt) - (-1+at)^2 - (3+bt)^2 + 7}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{6 - 3 - 1 - 9 + 7 + t(2b + 3a - b + 2a - 6b) + o(t)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}(5a - 5b) = \\ &= -\tfrac{5}{2}(1+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

(iii) $z = f(1,-1) + \langle \nabla f(1,-1), (x-1, y+1)\rangle = -3x + 5y + 3$

Soluzione esercizio 0.3

(i) Il limite non esiste: infatti, preso l'asse delle ascisse, che ha come rappresentazione parametrica $\varphi(t,t) = (t,0)$, si ha che $f(\varphi(t)) = t^3 - 4$ e quindi

$$\lim_{t\to -\infty} f(\varphi(t)) = -\infty, \quad \textit{mentre} \quad \lim_{t\to +\infty} f(\varphi(t)) = +\infty.$$

che sono diversi tra loro.

(ii) $\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y,\, 3y^2 + 3x)$.

(iii) $\nabla f(-1,1) = (6,0)$, e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial \nu_1}(-1,1) = \left\langle (6,0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle = -3.$$

(iv) $z = 6x - 1$.

Soluzione esercizio 0.4

(i) E' il triangolo di vertici $(-1,0)$, $(1,0)$ e $(1,2)$.

(ii) Vero.

(iii) Falso:

$$\begin{aligned}\partial \mathcal{C}A &= \{(1,t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in [0,2]\} \cup \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in [-1,1]\} \\ &\qquad \cup \{(t,t+1) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in [-1,1]\}\end{aligned}$$

(iv) Falso.

(v) Vero.

(vi) Vero (è vero in generale, non solo in questo caso!).