Esercitazione del 3 aprile 2008

Esercizio 0.1 Sia data la funzione $f(x,y) = \frac{x^2y^4}{1+x^4+y^2}$

(i) Considerate le curve

$$\varphi_1(t) = (0,t),\ \varphi_2(t) = (t,t),\ \varphi_3(t) = (3t, 4t^2),\ \varphi_4(t) = (t,t^2),\ \varphi_5(t) = (t^2,t), \quad t \in \mathbb{R}$$

calcolate i limiti

$$\lim_{t\to\infty} f(\varphi_i(t)), \quad i = 1,2,3,4,5.$$

(ii) Cosa si può dire del

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y)?$$

Esercizio 0.2 Sia dato l'insieme $\Omega =]-1,1] \times [0,1[$.

(i) $\mathcal{C}(\Omega) = (]-\infty,-1]\times\mathbb{R})\cup(]1,+\infty]\times\mathbb{R})\cup(]-1,1]\times[1,+\infty[)\cup(]-1,1]\times]-\infty,0[)$ (vero o falso?)

(ii) $\partial\mathcal{C}(\Omega) = ([-1,1]\times\{0\})\cup([-1,1]\times\{1\})\cup(\{-1\}\times]0,1[)\cup(\{1\}\times]0,1[)$. (vero o falso?)

(iii) Ω è chiuso. (vero o falso?)

(iv) $\Omega \cup \partial\mathcal{C}(\Omega)$ è chiuso. (vero o falso?)

(v) $(1,1) \in \Omega$. (vero o falso?)

(vi) $(1,0)$ è punto di accumulazione per $\mathcal{C}(\Omega)$. (vero o falso?)

Esercizio 0.3 Sia data la funzione $f(x,y) = \frac{x}{1+y^2}$.

(i) Disegnate gli insiemi di livello della funzione, in particolare disegnate $\{f = 0\}$, $\{f = -1\}$ e $\{f = 1\}$.

(ii) Determinate il massimo ed il minimo (se esistono: giustificate la risposta!) della funzione f sull'insieme

$$\Omega = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 - 2x \le 1\}.$$

Esercizio 0.4 Data la funzione $f(x,y) = \frac{2x-2y}{x^2+y^2+1}$,

(i) disegnate gli insiemi $\{f = 0\}$, $\{f = -1\}$ e $\{f = 1/2\}$;

(ii) disegnate gli insiemi $\{f \le 0\}$, $\{f \le -1\}$ e $\{f \ge 1/2\}$.

Soluzioni

Soluzione esercizio 0.1

(i) Posto $l_i = \lim_{t\to\infty} f(\varphi_i(t))$, si ha che

$$l_1 = 0,\ l_2 = +\infty,\ l_3 = +\infty,\ l_4 = +\infty\ e\ l_5 = 1.$$

(ii) Il limite di f non esiste poichè le restrizioni non hanno tutte lo stesso limite.

Soluzione esercizio 0.2 Si osservi che

$$\begin{aligned}\Omega = \ & \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ -1<x\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\le 1\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le y\}\cap \\ & \cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y<1\}\end{aligned}$$

e dunque, utilizzando le leggi di De Morgan si ha che

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\Omega) &= \mathcal{C}(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ -1<x\})\cup\mathcal{C}(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\le 1\})\cup\mathcal{C}(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le y\})\cup \\ &\quad \cup\mathcal{C}(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y<1\}) \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ -1\ge x\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x>1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0>y\}\cup \\ &\quad \cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y\ge 1\}\end{aligned}$$

(i) Vero.

(ii) Vero.

(iii) Falso.

(iv) Vero ($\partial\Omega = \partial\mathcal{C}\Omega$).

(v) Falso.

(vi) Vero.

Soluzione esercizio 0.3

(i) Si ha che

- $\{f=0\} = \{(x,y)\ :\ x=0\}$;
- $\{f=-1\} = \{(x,y)\ :\ x=-1-y^2\}$;
- $\{f=1\} = \{(x,y)\ :\ x=1+y^2\}$.

(ii) Essendo $\Omega = B(1,0;\sqrt{2})$, si ha che

$$\begin{aligned}1+\sqrt{2} &= f(1+\sqrt{2},0) = \max_\Omega f(x,y) \\ 1-\sqrt{2} &= f(1-\sqrt{2},0) = \min_\Omega f(x,y)\}.\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 0.4

(i)

$$\begin{aligned}\{f = 0\} &= \{(x, y)\ :\ x = y\}\\[1ex] \{f = -1\} &= \{(x, y)\ :\ (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1\}\\ \{f = 1/2\} &= \{(x, y)\ :\ (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 7\}.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\{f \le 0\} &= \{(x, y)\ :\ x \le y\}\\[1ex] \{f \le -1\} &= \{(x, y)\ :\ (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \le 1\}\\ \{f \ge 1/2\} &= \{(x, y)\ :\ (x - 2)^2 + (y + 2)^2 \le 7\}.\end{aligned}$$