Esercitazione del 13 marzo 2008

Esercizio 0.1 *Sia* $\varphi : [-2\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ *la curva* $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ *definita da*

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}, \quad t \in [-2\pi, 0[\,, \qquad \begin{cases} x(t) = -2t \\ y(t) = 1 + 2t \end{cases}, \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}[\,,$$

$$\begin{cases} x(t) = -\pi + \pi\cos(t) \\ y(t) = 1 + \pi\sin(t) \end{cases}, \quad t \in [\tfrac{\pi}{2}, \pi]\,.$$

(i) Disegnare il sostegno di φ*, specificando il verso di percorrenza, il punto iniziale e finale, l'equazione (cartesiana o implicita) di ciascuno dei tre tratti.*

(ii) Scrivere l'equazione parametrica e l'equazione cartesiana della retta tangente alla curva nel punto corrispondente a $t = -\frac{5}{6}\pi$*.*

Esercizio 0.2 *Sia* $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{3}(x-3)^2 \le y \le -x + 3,\ x^2 + y^2 \le 9\}$*.*

(i) Disegnare E*.*

(ii) Scrivere una parametrizzazione, orientata in verso antiorario, di ogni tratto del bordo di E*.*

Esercizio 0.3 Data la curva $\varphi : [0, 3] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y(t) = \frac{1}{2}t \end{cases}, \quad t \in [0, 1], \qquad \begin{cases} x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y(t) = \frac{3}{2} - t \end{cases}, \quad t \in \,]1, 2],$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{2} \end{cases}, \quad t \in \,]2, 3],$$

calcolare gli integrali

$$\int_\varphi x ds, \qquad \int_\varphi y ds.$$

Esercizio 0.4 Data la curva

$$\rho = 4(\sin(\theta) + \cos(\theta)), \quad \theta \in [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}],$$

(i) determinate la retta tangente alla curva nel piano (θ, ρ) in corrispondenza al punto $(\frac{\pi}{2}, 4)$;

(ii) dopo aver determinato le equazioni cartesiane della curva, disegnatene il sostegno nel piano (x, y);

(iii) determinate la tangente alla curva nel piano (x, y) in corrispondenza al punto $(0, 4)$;

(iv) che relazione esiste tra le rette calcolate nei punti (i) e (iii)?

0.1 **(i)** La curva φ è chiusa con punto iniziale/finale $\varphi(-2\pi) = (-2\pi, 1) = \varphi(\pi)$. Percorre il suo sostegno (si veda la Figura 1) in senso antiorario.

- il primo tratto ha equazione cartesiana $y = \cos(x)$, $x \in [-2\pi, 0]$, e $\varphi(-2\pi) = (-2\pi, 1)$, $\varphi(0) = (0, 1)$;
- il secondo tratto ha equazione cartesiana $y = 1 - x$, $x \in [-\pi, 0]$, e $\varphi(0) = (0, 1)$, $\varphi(\pi/2) = (-\pi, 1 + \pi)$;
- il terzo tratto ha equazione implicita $(x+\pi)^2 + (y-1)^2 = \pi^2$ (ovvero il sostegno di $\varphi_{|[\frac{\pi}{2},\pi]}$ è il quarto di circonferenza con centro $(-\pi, 1)$ e raggio π di estremi $\varphi(\pi/2) = (-\pi, \pi + 1)$ e $\varphi(\pi) = (-2\pi, 1)$.

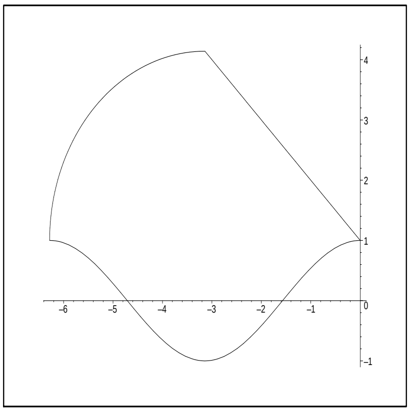

Figura 1: Sostegno della curva φ

(ii) Il parametro $t = -\frac{5}{6}\pi$ corrisponde al punto $P = (-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Siccome la curva è regolare in $t = -\frac{5}{6}$ ed è semplice, ha senso calcolare il vettore e la retta tangente in P. Si ha che $\varphi'(-\frac{5}{6}) = (1, \frac{1}{2})$, quindi la retta tangente ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{5\pi}{6} + t \\ y(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ed equazione cartesiana $y = \frac{x}{2} + \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

0.2 **(i)** L'insieme E è rappresentato nella Figura 2.
(ii) Parametrizziamo ciascuno dei tre tratti che costituiscono il bordo di E in senso antiorario.

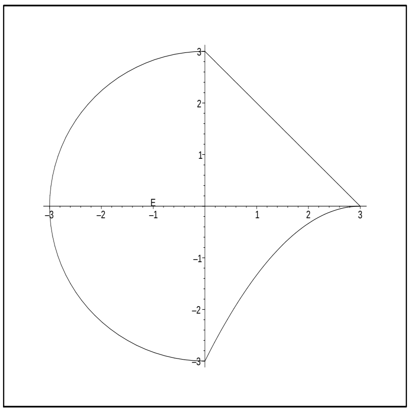

Figura 2: L'insieme E

- Il segmento di estremi $(3,0)$, $(0,3)$ è il sostegno della curva $\varphi_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, definita da
$$\begin{cases} x(t) = 3 - 3t \\ y(t) = 3t \end{cases}, \quad t \in [0,1];$$

- La semicirconferenza di estremi $(0,3)$ e $(0,-3)$ è il sostegno della curva $\varphi_2 : [1,3] \to \mathbb{R}^2$, definita da
$$\begin{cases} x(t) = 3\cos(\frac{\pi}{2}t) \\ y(t) = 3\sin(\frac{\pi}{2}t) \end{cases}, \quad t \in [1,3];$$

- Il ramo di parabola risulta essere il grafico della funzione $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2$, e questo è il sostegno della curva $\varphi_3 : [3,6] \to \mathbb{R}^2$ definita da
$$\begin{cases} x(t) = t - 3 \\ y(t) = f(t-3) \end{cases}, \quad t \in [3,6].$$

0.3

$$\int_\varphi x ds = \sqrt{3}, \qquad \int_\varphi y ds = 0.$$

Questo risultato si può ottenere in modo diretto calcolando, ad esempio, ($|\varphi'(t)| = 1$ per ogni t)

$$\int_\varphi x ds = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2} t dt + \int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{2} dt + \int_2^3 \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) dt = ... = \sqrt{3}$$

ed analogamente per $\int_\varphi y ds$. Oppure si può osservare che la curva è il perimetro di un triangolo equilatero, e il baricentro di questa curva ha coordinate $(\sqrt{3}/3,\, 0)$.

0.4

(i) L'equazione cercata è $\rho = 4 + 2\pi - 4\theta$, $\theta \leq 1 + \pi/2$.

(ii) Le equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x(t) = 4\sin(t)\cos(t) + 4(\cos(t))^2 \\ y(t) = 4(\sin(t))^2 + 4\sin(t)\cos(t) \end{cases}, \quad t \in [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}],$$

da cui si deduce che

$$x(t) + y(t) = 4(1 + 2\sin(t)\cos(t)), \quad (x(t))^2 + (y(t))^2 = 16(1 + 2\sin(t)\cos(t)),$$

per ogni $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Pertanto

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 = 4(x(t) + y(t)), \qquad \text{per ogni } t \in [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}],$$

da cui si deduce che il sostegno della curva è contenuto nella circonferenza con centro nel punto $(2, 2)$ e raggio $2\sqrt{2}$. In realtà il sostegno è tutta la circonferenza, in quanto θ può variare in un intervallo di ampiezza 2π. Inoltre la curva è chiusa e il sostegno è percorso in senso antiorario a partire dal punto $(0, 0)$.

(iii) L'equazione cercata è $y = 4 + x$.

(iv) La retta $y = 4 + x$ diventa, in coordinate polari, $\rho = 4/(\sin\theta - \cos\theta)$, $\theta \in]\pi/4, 5\pi/4[$. Le curve

$$\rho = 4(\sin\theta + \cos\theta) \quad e \quad \rho = 4/(\sin\theta - \cos\theta)$$

hanno nel punto $(\pi/2, 4)$ la stessa retta tangente $\rho = 4 + 2\pi - 4\theta$.
Analogamente la retta $\rho = 4 + 2\pi - 4\theta$ diventa, in coordinate cartesiane, la spirale di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = (4 + 2\pi - 4t)\cos t \\ y(t) = (4 + 2\pi - 4t)\sin t \end{cases} \quad t \leq 1 + \pi/2. \tag{1}$$

La spirale (1) e la circonferenza $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$ possiedono, nel punto $(0, 4)$, la stessa retta tangente $y = 4 + x$.