**ESERCIZI PER I CORSI DI MATEMATICA A E B**
**CORSO DI LAUREA IN SCIENZE AMBIENTALI**

Alessandro Zaccagnini & M. Gabriella Rinaldi

2.8.2002

Equazioni e disequazioni

**1.** Equazioni e disequazioni algebriche. Determinare l'insieme delle soluzioni delle equazioni e disequazioni seguenti:

$$3x^2 + 2x + 1 \leq 0 \qquad (1) \qquad\qquad x^2 - 2 \leq 0 \qquad (2)$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x - 4} \geq 0 \qquad (3) \qquad\qquad \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1} \qquad (4)$$

$$\frac{x^2}{x-2} \geq \frac{1}{x-2} \qquad (5) \qquad\qquad \frac{(x+1)(x^2-4x+4)}{(x-2)(x^2-4x+3)} \geq 0 \qquad (6)$$

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 > 0 \qquad (7) \qquad\qquad (x-1)x(x+1) \leq 0 \qquad (8)$$

**2.** (18.12.1997). Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 \leq 0; \\ \dfrac{x^2 - 8}{x(x+1)} \geq 0. \end{cases}$$

**3.** Disequazioni con il valore assoluto. Determinare l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano le disequazioni seguenti:

$$|x| < 2x \qquad (1) \qquad\qquad |2x+1| \geq x \qquad (2)$$

$$|x| \geq x^2 + 1 \qquad (3) \qquad\qquad |x^2 - 4| \leq (x-2)^2 \qquad (4)$$

$$|x+1| \leq |x-1| \qquad (5) \qquad\qquad |x^2| < |x| \qquad (6)$$

**4.** Disequazioni irrazionali. Determinare l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano le disequazioni seguenti:

$$\sqrt{x^2+1} < x^2 + 1 \qquad (1) \qquad\qquad \sqrt{x^2+1} \leq x^2 \qquad (2)$$

$$\sqrt{2x-3} \geq x + 1 \qquad (3) \qquad\qquad \sqrt{2x^2-1} \leq 4x - 3 \qquad (4)$$

**5.** (19.9.2001). Risolvere la disequazione

$$\sqrt{x^2 - 5x} \geq x - 3.$$

**6.** Equazioni e disequazioni trigonometriche. Determinare l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano le equazioni o disequazioni seguenti:

$$\sin x = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad (1) \qquad \cos x = 0 \quad (2)$$

$$\sin x = -\tfrac{1}{2} \quad (3) \qquad \cos x \geq -2 \quad (4)$$

$$\sin x < 1 \quad (5) \qquad \operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3} \quad \text{per } x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \quad (6)$$

$$\sin(2x) = \cos x \quad (7) \qquad \operatorname{tg} x = \sin x \quad \text{per } x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \quad (8)$$

$$\cos(2x) = \sin x \quad (9) \qquad \operatorname{tg} x = \cos x \quad \text{per } x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \quad (10)$$

$$|\sin x| \geq \tfrac{1}{2} \quad (11) \qquad \sin(2x) \leq \cos(2x) \quad (12)$$

$$\sin^2 x + 1 \leq 2\sin x \quad (13) \qquad \sin x > \cos x + 2 \quad (14)$$

**7.** (16.12.1999). Determinare l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano le disequazioni

$$\sin^2 x > \tfrac{1}{2} \quad (1) \qquad \cos^2 x > \tfrac{1}{2} \quad (2)$$

$$\sin^2 x < \tfrac{3}{4} \quad (3) \qquad \cos^2 x < \tfrac{3}{4} \quad (4)$$

**8.** (14.12.2000). Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 \leq 0$.

**9.** (10.10.2001). Risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \sin^2 x - \cos x \geq 1 \\ \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

**10.** Coordinate polari. Scrivere le coordinate polari dei punti le cui coordinate cartesiane sono $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(4,3)$, e le coordinate cartesiane dei punti le cui coordinate polari sono $(2,\pi)$, $(0,0)$, $(0,1)$, $\left(3,\frac{\pi}{4}\right)$, $(-1,\pi)$, $(\pi,\pi)$, $\left(5,\frac{3}{4}\pi\right)$.

**11.** Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche. Risolvere le equazioni e disequazioni seguenti, dove $a$ è un numero reale $> 1$ fissato:

$$3 \cdot 9^x + 2 \cdot 3^x - 5 \geq 0 \quad (1) \qquad \log_a x \geq 1 \quad (2)$$

$$\log_a |x| \geq 1 \quad (3) \qquad |\log_a x| \geq 1 \quad (4)$$

$$|\log_a |x|| \geq 1 \quad (5) \qquad a^{|x|} \geq 2 \quad (6)$$

$$\log_x (x^2 - 1) \leq 1 \quad (7) \qquad \log_x (x^2 - 1) \geq 1 \quad (8)$$

$$\exp_a \left\{\frac{x}{x-1}\right\} \leq 2 \quad (9) \qquad \left|\exp_a (x+1)\right| \geq 4 \quad (10)$$

$$10^x - 5^x \geq 0 \quad (11) \qquad (2^x - 8)(4^x - 1) \geq 0 \quad (12)$$

**12.** (16.12.1999). Determinare l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano le disequazioni

$$\exp_3(x^2 - 1) \leq \exp_9(x+2) \quad (1) \qquad \exp_4(x^2 - 1) \leq \exp_{16}(x+3) \quad (2)$$

$$\exp_5(x^2 - 1) \leq \exp_{25}(x+4) \quad (3) \qquad \exp_6(x^2 - 1) \leq \exp_{36}(x+5) \quad (4)$$

**13.** Dato il numero reale $b \in (0,1)$ determinare l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano ciascuna delle seguenti disequazioni:

$$\log_b x \geq 1 \qquad (1) \qquad\qquad \log_b |x| \geq 1 \qquad (2)$$

$$|\log_b x| \geq 1 \qquad (3) \qquad\qquad |\log_b |x|| \geq 1 \qquad (4)$$

$$b^{|x|} \geq 2 \qquad (5) \qquad\qquad \exp_b \left\{ \frac{x}{x-1} \right\} \leq 2 \qquad (6)$$

$$\left|\exp_b(x+1)\right| \geq 4 \qquad (7) \qquad\qquad \exp_b(2x-1) \leq 0 \qquad (8)$$

**14.** (14.12.2000). Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\exp_4 \frac{3x+1}{2x-1} \geq \exp_2 x.$$

## Formalizzazione

**15.** Il problema dell'età di Diofanto. Secondo la tradizione, il matematico alessandrino Diofanto volle che fosse incisa sulla sua lapide questa frase: "Zeus gli consentí di essere ragazzo per la sesta parte della sua vita e, con l'aggiunta di una dodicesima parte, gli rivestí le guance di peluria. Dopo un'altra settima parte della sua vita Zeus accese per lui le fiaccole nuziali e cinque anni piú tardi il matrimonio gli accordò un figlio. Ahimé! povero figlio nato troppo tardi; dopo aver raggiunto la metà dell'intera vita di suo padre, il gelido Fato se lo prese. Dopo essersi consolato con la scienza dei numeri per altri quattro anni, egli concluse la sua vita." A che età morí Diofanto?

**16.** Un escursionista si reca dal rifugio A a quello B distanti 16 km in $4^{\mathrm{h}}\,13^{\mathrm{m}}$. Effettua il ritorno, sullo stesso percorso, in $4^{\mathrm{h}}\,5^{\mathrm{m}}$. Sapendo che tiene una velocità di 4 km/h in pianura, 3 km/h in salita e 5 km/h in discesa, determinare la lunghezza totale dei tratti in pianura, in salita ed in discesa.

**17.** Determinare il coefficienti $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ in modo che il grafico della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ passi per i punti $A = (0,0)$, $B = (1,2)$, $C = (3,12)$.

**18.** Dato $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$ trovare un formula per il "numero fisso" della geometria elementare (rapporto fra l'apotema ed il lato del poligono regolare con $n$ lati) ed utilizzarla per determinare l'area del poligono regolare con $n$ lati, ciascuno dei quali ha lunghezza $d$.

**19.** Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ su $\mathbb{N}^2$ definita da

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow (a+d > b+c) \vee (a+d = b+c \wedge a > b).$$

Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di ordine totale stretto. (N. B. Questa è la relazione usata dall'UEFA nelle coppe internazionali di calcio. Per esempio, l'affermazione $(2,1)\mathcal{R}(1,0)$ vuol dire che è meglio vincere in casa 1-0 piuttosto che 2-1, visto il regolamento che favorisce, a parità di differenza reti, la squadra che ha segnato di piú in trasferta.)

**20.** (18.12.1997). Sulla parete $AB$ di una stanza rettangolare $ABCD$ c'è una porta, larga 1 m, con un cardine a 3 m di distanza da $A$. Sulla stessa parete $AB$ c'è un faretto, a 5 m di distanza da $A$. Determinare la lunghezza dell'ombra proiettata dalla porta sulla parete $AD$, sapendo che la porta forma un angolo $\theta$ con la parete $AB$. (Suggerimento: si consideri un sistema di riferimento cartesiano con origine in $A$, asse $x$ passante per $B$ ed asse $y$ passante per $D$.)

**21.** (16.12.1999). Sulla parete $AB$ di una stanza rettangolare $ABCD$ c'è una porta, larga 1 m, con un cardine a 3 m di distanza da $A$. Il lato $AD$ misura 5 m. Sapendo che nello spigolo $D$ c'è un faretto, determinare la lunghezza dell'ombra proiettata dalla porta sulla parete $AD$ quando la porta forma un angolo $\theta$ con la parete $AB$. (Suggerimento: si consideri un sistema di riferimento cartesiano con origine in $A$, asse $x$ passante per $B$ ed asse $y$ passante per $D$.)

**22.** (22.3.2001). Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

## Funzioni

**23.** Immagine ed immagine inversa. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$, determinare l'immagine e l'immagine inversa degli insiemi indicati di seguito:

$$A = [0,3] \qquad (1) \qquad\qquad B = [-2,2] \qquad (2)$$

$$C = (-1,1] \qquad (3) \qquad\qquad D = (-5,2] \qquad (4)$$

$$E = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) \qquad (5) \qquad\qquad F = (1,5] \qquad (6)$$

**24.** Funzioni iniettive e suriettive. Dire quali fra le seguenti funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = 2x - 1 \qquad (1) \qquad\qquad f(x) = 3x^2 - 1 \qquad (2)$$

$$f(x) = 3(x^2 - 1) \qquad (3) \qquad\qquad f(x) = \operatorname{arc\,tg}(2x - 3) \qquad (4)$$

$$f(x) = 3^{\sin x} \qquad (5) \qquad\qquad f(x) = 4^{x+1} \qquad (6)$$

$$f(x) = 2^{3x-1} \qquad (7) \qquad\qquad f(x) = \log(x^2 + 1) \qquad (8)$$

$$f(x) = \log_2(3^x) \qquad (9) \qquad\qquad f(x) = \sin\log(x^4 + 1) \qquad (10)$$

sono iniettive, suriettive o biiettive. Se possibile, determinarne esplicitamente l'immagine.

**25.** Dominio e immagine. Date le funzioni di espressione analitica

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad (1) \qquad\qquad f(x) = (x-1)^2 \qquad (2)$$

$$f(x) = x^3 - 1 \qquad (3) \qquad\qquad f(x) = (x-1)^3 \qquad (4)$$

$$f(x) = x^4 + x^2 \qquad (5) \qquad\qquad f(x) = \operatorname{tg}(2x + 1) \qquad (6)$$

$$f(x) = \sin(x^2) \qquad (7) \qquad\qquad f(x) = \sin^2 x \qquad (8)$$

$$f(x) = 3^{\log_2 x} \qquad (9) \qquad\qquad f(x) = \log(x^2 + 1) \qquad (10)$$

trovarne dominio ed immagine. Determinare inoltre qualche sottoinsieme significativo del dominio su cui risultano iniettive.

**26.** Funzione inversa. Date le funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = x^4 - 1 \qquad (1) \qquad\qquad f(x) = 2x^2 + 4x + 2 \qquad (2)$$

$$f(x) = \log_2(x^4 + 1) \qquad (3) \qquad\qquad f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x - 2) \qquad (4)$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \qquad (5) \qquad\qquad f(x) = \log_2 3^x \qquad (6)$$

$$f(x) = \log_3(1 + \sin^2 x) \qquad (7) \qquad\qquad f(x) = (x-1)^4 \qquad (8)$$

determinarne l'immagine, un opportuno sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui risultano invertibili, e determinarne esplicitamente l'inversa.

**27.** Si dimostri che le funzioni $f$, $g\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definite dalle relazioni

$$f(m,n) = 2^m(2n+1)-1$$
$$g(m,n) = \frac{1}{2}\big((m+n)^2+m+3n\big) = \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n$$

sono biiezioni. (Per studiare $g$ si consiglia di costruire una tabella con i valori $g(m,n)$ quando $0\le m,\, n\le 4$.)

**28.** (18.12.1997). Data la funzione $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}-x & \text{se } x<1;\\[2mm] \dfrac{1}{x+2} & \text{se } x\ge 1,\end{cases}$$

determinare $Y=f(\mathbb{R})$, dimostrare che $f$ è iniettiva, tracciarne un grafico approssimativo, e determinarne esplicitamente l'inversa $f^{-1}: Y\to\mathbb{R}$.

**29.** Data la funzione $f\colon\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\frac{x}{x+2}$$

dimostrare che è iniettiva, determinarne l'immagine $Y$ e l'inversa $f^{-1}\colon Y\to\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

**30.** Posto $X=(-1,+\infty)$ e data la funzione $f\colon X\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{se } x\in(-1,0],\\[2mm] 2x^2+1 & \text{se } x\in\mathbb{R}^+,\end{cases}$$

determinare $Y=f(X)$, un insieme $V$ sulla quale $f$ risulta invertibile, e la relativa inversa.

**31.** (16.12.1999). Data la funzione $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x<0,\\ 2x^2 & \text{se } x\ge 0,\end{cases}$$

dimostrare che $f$ è biiettiva e scriverne esplicitamente l'inversa.

**32.** (14.12.2000). Data la funzione $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ di espressione analitica

$$f(x)=\log_4\big(1+15\cos^2 x\big),$$

determinare $B=f(\mathbb{R})$, dire se $f$ è iniettiva o suriettiva, e determinare $A\subseteq\mathbb{R}$ tale che $f\colon A\to B$ sia invertibile, scrivendone esplicitamente l'inversa.

## Percentuali

**33.** (2.7.1996). Una coltura batterica è costituita ad un certo istante da $x_0$ batteri. Ogni batterio si divide in due in $T$ ore. Sapendo che dopo due ore ci sono 600 batteri e dopo 4 ce ne sono 4800, calcolare $T$ e $x_0$. Qual è la percentuale di crescita all'ora?

**34.** (18.12.1997). Uno sperimentatore suddivide un certo numero di cellule fra due terreni di coltura. Nel primo ne mette il 30% in meno che nel secondo. Dopo un certo tempo, scopre che il 10% delle cellule nel primo terreno è morto, e ne sono rimaste 630.000. Quante cellule aveva all'inizio?

**35.** (18.12.1997). Un'azienda con 4000 addetti licenzia il 20% del proprio personale per una crisi. Dopo un anno, in seguito all'andamento positivo del mercato, aumenta gli addetti del 20%.
a) Alla fine, gli addetti sono piú o meno rispetto all'inizio?
b) La risposta cambierebbe se prima l'azienda assumesse il 20% degli addetti, e poi licenziasse il 20%?
c) La risposta cambierebbe se gli addetti all'inizio fossero stati 3000?

**36.** (9.6.1998). È data una miscela di acqua e olio contenente il 25% di olio. Si aggiungono quantità di olio e di acqua pari rispettivamente al 30% e al 10% del miscuglio, ottenendo alla fine 14 litri di miscela. Trovare le quantità di olio e acqua presenti all'inizio.

**37.** (14.10.1998). Ieri il dollaro ha perso il 3% del suo valore. Di quanto deve aumentare in percentuale oggi per recuperare completamente la perdita di ieri? Per poter rispondere è necessario sapere quanto valeva il dollaro ieri mattina?

**38.** Durante i saldi di fine stagione, un negoziante propone ai suoi clienti la scelta fra due possibili ribassi: (1) prima uno sconto del 20%, e poi uno sconto del 10% sul prezzo scontato, oppure (2) prima uno sconto del 10%, e poi uno sconto del 20% sul prezzo scontato. Quale delle due opzioni è piú vantaggiosa per i clienti?

**39.** Supponiamo che il tasso di inflazione negli ultimi anni in Italia sia dato dalla seguente tabella:

| Anno | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Inflazione (%) | 10 | 7 | 5 | 6 | 4 | 3 |

A quale aumento percentuale globale fra l'inizio del 1999 e l'inizio del 1992 corrispondono questi dati?

**40.** L'inflazione stimata per il 1999 è del 2%. Nello stesso periodo i salari sono aumentati del 3%. Qual è l'incremento reale del potere d'acquisto dei salari?

## Calcolo combinatorio

**41.** Sapendo che ogni essere umano ha 23 coppie di cromosomi in ogni cellula (tranne quelle destinate alla riproduzione), dire quanti figli genotipicamente diversi possono avere un uomo e una donna.

**42.** Usando la tabella di conversione fra triplette e amminoacidi, dire in quanti modi diversi (cioè con quante triplette diverse) è possibile codificare la seguente sequenza di amminoacidi (del tutto immaginaria):
STOP–ARG–PHE–TRE–MET–PRO–GLI–ASP–LYS–ALA–STOP.

**43.** (22.5.1996). Un docente vuole attribuire a ciascuno di 7 studenti un esercizio scelto fra 10 pubblicati sui libri di testo. In quanti modi può fare ciò
a) se piú studenti possono avere lo stesso esercizio;
b) se ogni studente deve avere un esercizio diverso.

**44.** (4.6.1996). Le nuove targhe automobilistiche sono formate da due lettere dell'alfabeto seguite da tre cifre e ancora da una coppia di lettere. Supponendo che le lettere siano tratte da un alfabeto di 26 lettere, che ogni cifra sia un qualunque intero 0, 1, . . . , 9 e che lettere e cifre possano anche essere ripetute,
a) quante targhe distinte possono essere formate?
b) se si suppone che il numero delle nuove immatricolazioni ogni anno sia costante e pari a $p$ ($p > 0$), dopo quanti anni a partire dall'anno zero in cui sono uscite le prime $N_0$ targhe, sarà esaurito il numero di targhe formate con il criterio ora indicato?

**45.** (2.7.1996). Cinque lettere vengono scritte a destinatari diversi e infilate distrattamente in buste già preparate senza controllare gli indirizzi. Quante sono le possibili ripartizioni delle lettere tra i destinatari?

**46.** (2.4.1998). Il Ministero delle Finanze ha intenzione di introdurre un nuovo tipo di "Gratta e vinci" con 5 caselle nelle quali si possono trovare numeri (interi) compresi fra 1 e 36 (estremi inclusi). Quante schede diverse si ottengono se

a) i 5 numeri devono essere tutti diversi fra loro?

b) fra i 5 numeri ce ne possono essere anche 2 o piú uguali fra loro?

c) Sapendo che il Ministro vuole che siano possibili almeno 10.000.000 di schede diverse, e non piú di 50.000.000, dire se deve scegliere il caso a) o il caso b).

**47.** (9.6.1998). Per verificare l'efficacia di un farmaco lo si sperimenta su un campione di pazienti, a ciascuno dei quali viene assegnata, per motivi di riservatezza, una sigla composta da 2 lettere dell'alfabeto (di 26 lettere). Si dica qual è il numero massimo di pazienti che può essere identificato in questo modo. Come cambia la risposta se si usano solo 21 lettere? Come cambia la risposta se si usano 21 lettere e sigle composte da 3 caratteri?

**48.** (8.7.1998). La Nazionale brasiliana di calcio ai Campionati del Mondo in Francia ha 22 giocatori, di cui 3 portieri, 7 difensori, 7 centrocampisti e 5 attaccanti. Quante formazioni diverse possono essere schierate, sapendo che scenderanno in campo un portiere, 4 difensori, 3 centrocampisti e 3 attaccanti? Per semplicità, si considerino equivalenti i giocatori di ciascun ruolo.

**49.** (14.10.1998). Un tale vuole invitare a cena 6 amici scelti da una lista di 10.

a) In quanti modi lo può fare?

b) In quanti modi lo può fare se due di loro non verrebbero insieme alla cena?

**50.** (2.2.1999). Un gruppo di 16 ragazzi parte per una gita; 5 vanno in un'auto e 4 in un'altra, mentre il resto cammina. In quanti modi si può distribuire il gruppo per il viaggio? Come cambia la risposta se ciascun proprietario guida la propria auto?

**51.** (23.2.1999). Dire in quanti modi è possibile distribuire 3 carte a testa a 4 giocatori, oppure 10 carte a testa, scegliendole da un normale mazzo di 40. Non si richiede il calcolo esplicito.

**52.** Quante sono le diverse possibili "colonne" del totocalcio? Quante fra queste totalizzeranno $k$ punti, se $k \in [0,13] \cap \mathbb{N}$? Per quale $k$ si ha il massimo numero di colonne diverse?

**53.** Dire quanto costa giocare una schedina del totocalcio con $n$ triple ed $m$ doppie, sapendo che ogni colonna costa 600L.

**54.** Quanti sono i possibili ambi nella tombola? E quante sono, rispettivamente, le terne, le quaterne e le cinquine?

**55.** (16.12.1999). Un industriale che produce caramelle di 15 diverse qualità vuole venderle in sacchetti da 10. Quante confezioni diverse può mettere in vendita, sapendo che in ogni confezione tutte le caramelle devono essere di qualità diversa?

**56.** (20.9.2000). Sapendo che una tripletta di basi (scelte fra U, G, A, C) codifica un amminoacido, dire qual è il numero massimo di amminoacidi teoricamente codificabili. Come cambierebbe la risposta se si utilizzassero solo 2 basi invece di 3?

**57.** (14.12.2000). In un club con 110 soci si devono rinnovare le cariche sociali. Si devono scegliere un presidente, un vicepresidente, 3 segretari e 10 consiglieri. In quanti modi può essere composto il nuovo direttivo? E se i soci A e B, che sono coniugi, non possono essere entrambi segretari?

**58.** (14.12.2000). In un grande albergo si devono assumere 5 aiuto cuochi, 12 camerieri, un guardarobiere e 2 posteggiatori. Si presentano 82 candidati: in quanti modi possono essere scelti? E se A e B non vogliono essere entrambi aiuto cuochi?

**59.** (21.2.2001). Gli indirizzi Internet sono tutti del tipo $a.b.c.d$ dove $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{N} \cap [0, 255]$. Sapendo che esistono circa 6.4 miliardi di esseri umani, dire se è possibile assegnare un indirizzo Internet ad ogni persona. Può essere utile sapere che $256 = 2^8$ e che 6.4 miliardi è $80000^2$.

**60.** (6.6.2001). Dire quanti lati ha un poligono convesso con 90 diagonali, motivando la risposta.

**61.** (10.10.2001). Otto amici (4 ragazzi e 4 ragazze) si suddividono in 4 squadre per un torneo di beach-volley. In quanti modi diversi lo possono fare? Come cambia la risposta se ciascuna squadra deve essere composta da un ragazzo e da una ragazza?

## Successioni

**62.** (4.6.1996). Una sostanza radioattiva perde il $p\%$ della sua massa ogni anno. Il periodo, cioè il tempo richiesto perché la massa si dimezzi, è 12 anni. Calcolare $p$.

**63.** (2.7.1996). In una regione soggetta al fenomeno dell'emigrazione la popolazione diminuisce ogni anno di una quantità fissa $p$, passando da un milione di abitanti nel 1990 a 941.194 nel 1993. Calcolare la costante $p$ e dire quanti abitanti sono previsti per il 1997 e per il 2000.

**64.** (17.9.1996). In una foresta per la produzione di legname ogni anno viene abbattuto il 12% delle piante. Inoltre, nascono o vengono piantate $K$ piante l'anno. Sia $N_0$ il numero iniziale di piante della foresta ed $a_n$ il numero delle piante della foresta dopo $n$ anni (per cui $a_0 = N_0$).

1) Calcolare $a_1$, $a_2$, $a_3$ e cercare una formula chiusa per $a_n$.
2) Per quali valori di $N_0$ e $K$ la successione $a_n$ è crescente? Costante? Decrescente?
3) Qual è il valore limite a cui tende $a_n$ per $n \to \infty$?

**65.** (8.10.1996). Una sostanza radioattiva perde ogni anno l'1.8% della sua massa per disintegrazione. Se ogni anno viene liberata nell'atmosfera una quantità $Q$ di tale sostanza, qual è la massa totale che troveremo nell'atmosfera dopo 10 anni? Si potrà mai raggiungere una quantità di $60Q$? Se sí, dopo quanti anni?

**66.** (17.2.1997). Si vuole investire la somma di denaro S, ed una banca propone le due seguenti alternative: interesse semplice con tasso del $p\%$, o interesse composto col tasso dell'$r\%$. Si determinino formule per il capitale disponibile $S_n$ o $C_n$ dopo $n$ anni, rispettivamente nei due casi suindicati. Supponendo poi che $p = 5\%$ ed $r = 4\%$ e che l'investimento duri 10 anni, dire quale tipo di investimento conviene scegliere. La risposta cambia se l'investimento dura 20 anni?

**67.** (18.12.1997). La quantità di ${}^{14}C$ in un campione dimezza ogni 5700 anni. Dare una stima per la quantità di ${}^{14}C$ presente dopo 2000 anni, partendo da un campione di 2 g. (Suggerimento: usare il secolo come unità di misura del tempo).

**68.** (2.4.1998). Calcolare il

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n^2 - 4n + 2}{n^2 + 7n - 1}.$$

Se $\varepsilon = 1$, come deve essere scelto $\overline{n}(\varepsilon)$ nella definizione di limite?

**69.** (2.4.1998). Una popolazione di animali è soggetta al fenomeno dell'emigrazione. Un naturalista che studia questa popolazione si accorge che ogni anno emigra il 10% degli animali presenti all'inizio dell'anno, e, durante un anno, ne nascono $N$. Sia $A$ il numero di animali presenti all'inizio, e sia $a_n$ il numero di animali presenti dopo $n$ anni (per cui $a_0 = A$). Scrivere esplicitamente i primi 5 termini della successione $a_n$ (cioè $a_0$, $a_1$, ... , $a_4$) in funzione di $A$ ed $N$. Determinare una formula che permetta il calcolo diretto di $a_n$. Per quali valori di $N$ la popolazione rimane costante? Per quali valori aumenta, e per quali diminuisce? È possibile stabilire se $a_n$ tende ad un limite quando $n \to \infty$?

**70.** (9.6.1998). Una fabbrica immette quotidianamente in un lago 30 g di sostanze tossiche. Ogni giorno la metà della sostanza tossica presente nel lago viene eliminata, perché si riversa nell'emissario. Dire quanti grammi di sostanza tossica sono presenti nel lago dopo 30 giorni, e se può essere raggiunta una quantità totale di 60 g.

**71.** (8.7.1998). Un lago di area $S$ km$^2$ è infestato da una pianta acquatica. Sperimentalmente, si trova che ogni mese la superficie occupata aumenta dell'$r$%, e che la superficie occupata all'insorgere del fenomeno è $\frac{1}{1000}S$. Si dica dopo quanti mesi la pianta ha occupato almeno metà del lago. Per tenere sotto controllo la crescita, gli amministratori locali decidono di utilizzare un prodotto chimico il cui effetto è quello di ridurre il valore di $r$ ad $s = \frac{1}{2}r$. Se gli amministratori avessero usato questo prodotto sin dall'inizio, dopo quanti mesi la pianta avrebbe occupato metà del lago? Si faccia il calcolo esplicito quando $r = 10$ e quando $r = 6$. Questo modello è realistico?

**72.** (16.9.1998). La popolazione di cinghiali di una regione montana deve essere tenuta sotto controllo per evitarne una crescita troppo rapida. La comunità montana locale decide dunque di abbatterne un certo numero $N$ di capi alla fine di ogni anno. Sapendo che la popolazione stimata all'inizio del 1998 è di 3000 capi, e che si riproducono al tasso del 10% l'anno, come deve essere scelto $N$ se si vuole che all'inizio del 2002 i cinghiali non siano piú di 4000? Se la comunità montana decidesse di abbattere una percentuale fissa $r$% di cinghiali, fermi restando gli altri dati, come si dovrebbe scegliere $r$? È possibile arrivare all'estinzione della popolazione di cinghiali, scegliendo male il valore di $N$ o quello di $r$?

**73.** (2.2.1999). Un tale vince 5 miliardi al Superenalotto, e vuole vivere di rendita prelevando una somma $S$ alla fine di ogni anno. Sapendo che la banca gli pratica un interesse del 10% annuo, si dica quanti soldi ha in banca dopo $n$ anni, e qual è la cifra massima $M$ che può prelevare senza esaurire mai il capitale. Si dica dopo quanto tempo ha esaurito il capitale se preleva ogni anno la cifra $2M$.

**74.** (2.2.1998). Un fascio di luce dimezza la sua intensità attraversando ortogonalmente una lastra di vetro dello spessore di 1 cm. Qual è l'intensità della luce dopo aver attraversato una lastra dello spessore di 2.5 cm? Qual è lo spessore di una lastra per cui l'intensità della luce uscente è l'80% della luce incidente?

**75.** (23.2.1999). Determinare (se esiste) il limite della successione $a_n$ definita da

$$a_n = \frac{\log(n^2+1) - \sin(n)}{\log(n+2)}$$

**76.** (23.2.1999). Una ditta deve lavare dei recipienti mediante risciacqui successivi con acqua. Al termine di ogni risciacquo rimane nel recipiente una quantità di residuo pari al 5% della quantità che vi si trovava in precedenza. Quanti risciacqui si devono effettuare per avere al piú lo 0.01% della quantità di residuo iniziale? Se il residuo iniziale massimo è stimato essere di 220g, quanti risciacqui si devono effettuare per avere al piú 0.01g di residuo?

**77.** (2.6.1999). Calcolare il limite $L$ della successione $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da

$$a_n = \frac{6n^2 - 34n - 1}{2n^2 - 12n + 4}.$$

Scelto $\varepsilon = \frac{1}{2}$, determinare $n_0(\varepsilon)$ in modo tale che risulti $\left|a_n - L\right| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$.

**78.** (13.10.1999). Una banca propone ad un cliente due forme di investimento: nella prima il cliente non paga commissioni e riceve il 5% di interesse semplice annuo. Nella seconda il cliente paga subito il 6% di commissione e poi riceve il 5% di interesse composto annuo. Quale forma di investimento conviene scegliere sapendo che la durata è 10 anni?

**79.** Se i prezzi crescessero con il tasso d'inflazione annuo costante dell'$r$%, determinare $r$ sapendo che

1. dopo 10 anni i prezzi sono raddoppiati;
2. dopo 20 anni i prezzi sono raddoppiati.

**80.** Investendo la somma $S > 0$ al tasso composto annuo dell'$r$%, dopo quanti anni si raggiunge la cifra $2S$?

**81.** (16.3.2000). In un lago c'è una popolazione di pesci che si riproduce al tasso del 4% all'anno e la cui biomassa è stimata in 12000 kg all'inizio del 2000. L'autorità competente permette la pesca di $P$ kg ogni anno, ma le associazioni ecologiste protestano, sostenendo che in questo modo la popolazione si estinguerà all'inizio del 2080. Determinare il valore di $P$. Determinare la massima pesca sostenibile.

**82.** (22.3.2001). Un certo farmaco deve essere assunto in pillole che contengono 10 mg di principio attivo ciascuna. Sapendo che per la cura è necessario prendere una pillola al giorno e che ogni giorno si elimina il 10% del principio attivo per mezzo del metabolismo, si dica qual è la quantità di principio attivo nell'organismo $n$ giorni dopo l'inizio della cura. Si dica anche quando è necessario interrompere la cura se il principio attivo diviene tossico non appena supera la quantità di 50 mg.

## Derivate

**83.** Calcolo della funzione derivata. Calcolare la funzione derivata delle funzioni elencate di seguito:

$$f(x) = \log(x^2+1) \qquad (1) \qquad\qquad f(x) = \sin(x^2) \qquad (2)$$

$$f(x) = \sin^2 x \qquad (3) \qquad\qquad f(x) = e^{2x}\sin x \qquad (4)$$

$$f(x) = \sin x \cos x \qquad (5) \qquad\qquad f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \qquad (6)$$

$$f(x) = \log(1+e^x) \qquad (7) \qquad\qquad f(x) = e^{1+\log x} \qquad (8)$$

$$f(x) = (\log x)^2 e^{-3x} \qquad (9) \qquad\qquad f(x) = \frac{\sin x}{\log\cos x} \qquad (10)$$

$$f(x) = x^x \qquad (11) \qquad\qquad f(x) = x\log x \qquad (12)$$

$$f(x) = \sin\log x \qquad (13) \qquad\qquad f(x) = \log\sin x \qquad (14)$$

$$f(x) = \operatorname{tg}^2 x \qquad (15) \qquad\qquad f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad (16)$$

$$f(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x) \qquad (17) \qquad\qquad f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \qquad (18)$$

**84.** (27.3.1996). Scrivere il rapporto incrementale relativo alla funzione

$$y = \frac{1}{2x}$$

nel punto $x = x_0$.

**85.** (17.2.1997). Determinare l'equazione della retta tangente all'arco di circonferenza di equazione

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

nel punto di coordinate $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

**86.** (17.2.1997). Per quali valori di $x$ è definita la funzione $f\colon x \mapsto \log\log x$? La funzione $f$ e la sua derivata hanno lo stesso insieme di definizione?

**87.** (2.4.1998). Scrivere il rapporto incrementale della funzione $f(x) = \sqrt{3x+1}$ nel punto $x_0 = 0$.

**88.** (2.4.1998). Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{x}{4 + x^2},$$

determinarne la derivata $f'$ e dire per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha $f'(x) \geq 0$. Calcolare esplicitamente $f'(0)$ ed $f'(-1)$.

**89.** (22.3.2001). Determinare il dominio ed il segno delle funzioni seguenti e delle loro derivate:

$$f(x) = x^2 e^{-2x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x \log(3x).$$

**90.** (19.9.2001). Sia $f$ la funzione reale di variabile reale definita dalla legge $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Per quali valori di $x$ è verificato il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[2, 5]$?

## Studio di funzioni

**91.** (27.3.1996). Per quali valori del parametro $k$ la funzione

$$y = 4x^3 + kx^2 + 3x + 7$$

è crescente per ogni valore di $x$?

**92.** (27.3.1996). La distanza $d$ che una macchina può percorrere con un litro di benzina dipende dal modulo $v$ della velocità (in km/h) da essa tenuta. Tale distanza sia espressa in km dalla seguente funzione:

$$d(v) = \frac{av}{b + v^2}$$

dove $a$ e $b$ sono costanti positive. Se si dispone di 10 l. di benzina e si viaggia a velocità costante $v$,

1) indicare qual è la velocità ottimale, cioè la velocità che consente di percorrere la massima distanza;
2) determinare la massima distanza percorribile;
3) rispondere alle domande 1), 2) nel caso particolare $a = 2700$ e $b = 8100$.

**93.** (2.7.1996). Un proiettile lanciato verso l'alto raggiunge una quota $h$ (in metri) seguendo la legge

$$h(t) = 120t - 4.9t^2$$

dove $t$ indica il tempo misurato in secondi. Trovare la velocità iniziale e la quota massima raggiunta. Quanto tempo impiegherà il proiettile a tornare a terra?

**94.** (17.9.1996). Dati $a$, $b > 0$, si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{ax^2}{b^2 + x^2},$$

se ne individuino le principali caratteristiche (simmetria, segno, intersezioni con gli assi, concavità, limiti ... ) e se ne disegni un grafico approssimativo. Determinare anche le intersezioni del grafico con la retta di equazione $y = x$.

**95.** (17.9.1996). Si vuole costruire una lattina cilindrica della capienza di 0.33 l, facendo in modo che la superficie totale sia la minima possibile.

1) Calcolare le misure (diametro ed altezza) della lattina ottimale con arrotondamento a meno di un millimetro, supponendo trascurabile lo spessore dell'involucro.
2) Per motivi estetici, ferma restando la capacità di 0.33 l, le lattine vengono costruite con altezza doppia del diametro. Calcolare le misure di questo tipo di lattina, con gli stessi arrotondamenti.
3) (Fac.) Esprimere in forma percentuale arrotondata alla prima cifra decimale lo spreco di materiale per l'involucro che deriva dal secondo tipo di lattine.

**96.** (8.10.1996). Studiare il comportamento della funzione

$$f(t) = e^{-at^2/2},$$

dove $a$ è un numero positivo fissato, indicandone segno, simmetrie, estremi, comportamento asintotico, e disegnarne approssimativamente il grafico. Tracciare anche grafici approssimativi delle funzioni $g(t) = -f(t)$ ed $h(t) = 1 - f(t)$, ricavandoli da quello di $f$.

**97.** (2.4.1998). Si dica se è possibile scegliere $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - \sqrt{2x+1} + 1}{3x} & \text{per } x > 0, \\ 3x + k & \text{per } x \le 0, \end{cases}$$

risulti continua.

**98.** (20.5.1998). Si determini il dominio della funzione di espressione analitica

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 4x + 4}$$

e se ne disegni un grafico approssimativo. Si determini l'immagine della funzione $f$.

**99.** (20.5.1998). Sulla riva di un fiume largo $L$ metri si trova una centrale elettrica. Sull'altro lato, $d$ metri a monte, si trova una fabbrica. L'installazione della linea elettrica costa 3.000 Lire al metro lungo la riva del fiume, e 5.000 Lire sott'acqua. Descrivere il percorso piú economico che colleghi la centrale alla fabbrica.

**100.** (9.6.1998). Trovare il minimo assoluto della funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di espressione

$$f(x) = e^{2x} + 4e^{-2x} + 6x,$$

e disegnarne un grafico approssimativo.

**101.** (9.6.1998). Trovare il più piccolo dei numeri reali $K$ tali che

$$Kx \geq 1 + \log x$$

per ogni $x > 0$. Si suggerisce di studiare il grafico della funzione $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1 + \log x}{x}.$$

**102.** (8.7.1998). Determinare il dominio della funzione di espressione analitica

$$f(x) = \log\left(x - \sqrt{x^2 - 4}\right)$$

e quello della sua derivata. Calcolare, se possibile, i seguenti

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x).$$

**103.** (8.7.1998). La distanza $d$ (espressa in km) che un'automobile percorre alla velocità $v$ (in km/h) con 1 l di carburante è data dalla relazione

$$d(v) = av^2 e^{-bv}$$

dove $a = 0.015$ e $b = 0.02$. Sapendo che il serbatoio contiene 30 l di carburante, si dica se è possibile percorrere la distanza di 450 km senza fare rifornimento. In caso affermativo, si dica se è possibile effettuare il viaggio in meno di 3 ore.

**104.** (16.9.1998). Si dica se è possibile scegliere $k \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$g(x) = \begin{cases} x + k^2 & \text{per } x \leq 0, \\ \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{3x} & \text{per } x > 0, \end{cases}$$

risulti continua. Per questi valori di $k$ se ne tracci un grafico approssimativo.

**105.** (16.9.1998). Data la funzione di espressione

$$f(x) = 3x^2 + Ax^{-3}$$

per $x > 0$, trovare il minimo valore del parametro $A$ per cui $f(x) \geq 25$ per ogni $x > 0$.

**106.** (14.10.1998). Tenuto conto del fattore di invecchiamento e del tasso di sconto, il guadagno di un produttore di vino è dato dalla seguente funzione del tempo $t$ (in anni)

$$f(t) = 2^{\sqrt{t}} e^{-rt},$$

dove $r = 0.2$. Qual è il momento migliore per vendere il vino? Suggerimento: si scriva $f$ nella forma esponenziale, oppure se ne studi il logaritmo.

**107.** (14.10.1998). Si dica se è possibile scegliere $k \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$g(x) = \begin{cases} k^2 - x & \text{per } x \leq 0, \\ \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x} & \text{per } x > 0, \end{cases}$$

risulti continua. Per questi valori di $k$ se ne tracci un grafico approssimativo.

**108.** (2.2.1999). Data la funzione $f$ di espressione analitica

$$f(x) = \frac{3x^2+1}{x^3+1}$$

determinarne dominio, immagine, segno, eventuali asintoti ed altre caratteristiche salienti. Tracciarne un grafico approssimativo ed utilizzarlo per determinare il numero delle soluzioni delle equazioni $f(x) = \frac{3}{2}$ ed $f(x) = \frac{1}{2}$. Suggerimento: si osservi che $f'(1) = 0$. Non conviene calcolare $f''$.

**109.** (2.6.1999). Data la funzione $f$ di espressione analitica

$$f(x) = \frac{x-a}{x^2-3}$$

determinarne dominio, segno, eventuali asintoti ed altre caratteristiche salienti in funzione del parametro reale $a$. Determinare $a$ in modo che $f'(1) = 0$ e per questo valore di $a$ tracciare un grafico approssimativo di $f$ e ricavarne l'immagine.

**110.** (16.3.2000). Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la derivata della funzione $f$ di espressione analitica

$$f(x) = e^{-3x}\big(6\sin(2x) + 4\cos(2x)\big)$$

è positiva.

**111.** (16.3.2000). Data la funzione $f$ di espressione analitica

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+4x+4}$$

tracciarne un grafico approssimativo e determinarne l'immagine. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \frac{1}{2}$ utilizzando il grafico di $f$.

**112.** (7.6.2000). Disegnare un grafico approssimativo della funzione di espressione analitica

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2}$$

dopo averne determinato il dominio. Utilizzare il grafico ottenuto per disegnare il grafico della funzione $g(x) = \log f(x)$.

**113.** (12.7.2000). Determinare $L \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di espressione analitica

$$f(x) = \frac{x^3+Lx^2+3}{x^2+x+1}$$

abbia un asintoto di equazione $y = x + 5$.

**114.** (12.7.2000). Studiare la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di espressione analitica

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-3x+2}.$$

**115.** (11.10.2000). Studiare la funzione di espressione analitica $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)^2}$ tracciandone un grafico approssimativo.

**116.** (21.2.2001). Tracciare un grafico approssimativo della funzione di espressione analitica

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 - 2},$$

determinandone dominio, segno, eventuali asintoti, punti di massimo e di minimo. Non conviene calcolare la derivata seconda. Si osservi che $f'(0) = f'(2) = 0$.

**117.** (22.3.2001). Dire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di espressione analitica

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)}{x} & \text{per } x > 0, \\ x^2 + k & \text{per } x \le 0, \end{cases}$$

è continua.

**118.** (6.6.2001). Tracciare un grafico approssimativo della funzione di espressione analitica

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x.$$

Dimostrare che

$$\lim_{x \to +\infty} x f(x) = \frac{1}{2} \qquad \text{e che } f(x) \ge \frac{1}{3x} \text{ per } x \ge 1.$$

## Limiti di successioni e di funzioni

**119.** Calcolare (se esistono) i limiti per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni:

$$\frac{(-1)^n}{n^2+1} \quad (1) \qquad (-1)^n \quad (2)$$

$$\frac{2^n + 3^n}{4 \cdot 3^n} \quad (3) \qquad \frac{\cos^2 n}{2^n} \quad (4)$$

$$\frac{2^n n^2}{3^n} \quad (5) \qquad \frac{n^2}{2n+1} \quad (6)$$

$$\frac{n}{2n-3} \quad (7) \qquad \sqrt{n} \quad (8)$$

$$\frac{n-7}{2n^2-5} \quad (9) \qquad \frac{n + (-1)^n}{2n+1} \quad (10)$$

$$n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \quad (11) \qquad \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (12)$$

**120.** Calcolare (se esistono) i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2\sin x}{x^2 + 1} \quad (1) \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \sin x}{x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x^2)}{1 - \cos x} \quad (3) \qquad \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)^3}{x^2 - 9} \quad (4)$$

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \quad (5) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x \log(1+x) + 2\cos x - 2}{x^3} \quad (6)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (7) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{x^3} \quad (8)$$

**121.** (16.3.2000). Calcolare il

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)\log(1+4\sin x)}{e^{3x}-1}$$

giustificando tutti i passaggi.

**122.** (22.3.2001). Determinare il valore del

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2+n+10}{n^2+1}.$$

Se $\varepsilon=\frac{1}{2}$, come deve essere scelto $\overline{n}(\varepsilon)$ nella definizione di limite?

## Polinomi di Taylor

**123.** (22.5.1996). Approssimare la funzione $y=(x+1)^{1/2}$ con un polinomio di secondo grado nell'intorno del punto $x_0=0$.

**124.** (8.10.1996). Scrivere il polinomio di grado 3 che meglio approssima la funzione

$$f(x)=e^{2x}-\cos x-3\sin x$$

nel punto $x_0=0$.

**125.** (20.5.1998). Scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine in $x_0=0$ per le funzioni $f(x)=\cos(3x)$ e $g(x)=\sin(2x)$. Utilizzare il risultato ottenuto per scrivere il polinomio di Taylor relativo alla funzione $h(x)=2f(x)-3g(x)$.

**126.** (23.2.1999). Scrivere il polinomio di Taylor al terzo ordine della funzione $f(x)=\sin x-x\cos x$ in un intorno del punto $x_0=0$ e del punto $x_1=\pi$.

**127.** (2.6.1999). Scrivere il polinomio di Taylor al terzo ordine della funzione $f(x)=\operatorname{tg}(3x)-\cos(2x)$ in un intorno del punto $x_0=0$ e del punto $x_1=\pi$.

**128.** (13.10.1999). Scrivere il polinomio di Taylor al secondo ordine della funzione $f(x)=\big(e^x-\cos x\big)\log(1+x)$ in un intorno del punto $x_0=0$ ed in un intorno del punto $x_1=3$.

**129.** (10.5.2000). Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine per la funzione di espressione analitica $f(x)=(1-e^{-2x})\sin(3x)$ nell'intorno del punto $x_0=0$.

**130.** (11.10.2000). Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ nell'intorno del punto $x_0=0$.

## Calcolo integrale

**131.** (27.3.1996). Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dall'asse delle ascisse e dalla curva di equazione $y=x^3-4x$, nell'intervallo $[-2,3]$.

**132.** (22.5.1996). Calcolare mediante integrazione per parti

$$\int_0^4 x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

**133.** (4.6.1996). In una serra viene fatta variare la temperatura artificialmente durante la giornata, secondo la legge

$$T(t) = \frac{13824}{432 + (t-12)^2}, \qquad\qquad 0 \le t \le 24$$

(temperatura $T$ misurata in gradi centigradi, tempo misurato in ore). Calcolare la temperatura massima, la minima, la temperatura media durante la giornata e dire a quali ore vengono raggiunte tali temperature.

**134.** (2.7.1996). Determinare una primitiva della funzione $x \log x$ con $x \in (0, +\infty)$ e verificare il risultato derivando la funzione ottenuta.

**135.** Calcolo di primitive. Determinare l'insieme delle primitive delle funzioni qui sotto ed utilizzare i risultati ottenuti per calcolare l'area delle regioni finite di piano delimitate dall'asse delle ascisse e dal loro grafico sul dominio indicato a fianco:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = x\log(x^2+1)$ | su $[-1,1]$; | (1) | $f(x) = x\sin(x^2)$ | su $[0, \sqrt{\pi}]$; | (2) |
| $f(x) = \sin^2 x$ | su $[0, 2\pi]$; | (3) | $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ | su $[0,2]$; | (4) |
| $f(x) = \sin x \cos x$ | su $[0, 2\pi]$; | (5) | $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ | su $[-1,1]$; | (6) |
| $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$ | su $[-1,1]$; | (7) | $f(x) = e^{1+\log x}$ | su $[1,2]$; | (8) |
| $f(x) = xe^{-x}$ | su $[0,1]$; | (9) | $f(x) = x^2e^{-x}$ | su $[0,1]$; | (10) |
| $f(x) = x^3e^{-x}$ | su $[0,1]$; | (11) | $f(x) = x\log x$ | su $[1,2]$; | (12) |
| $f(x) = \sin x \log\cos x$ | su $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; | (13) | $f(x) = \operatorname{tg} x$ | su $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; | (14) |
| $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ | su $[0,2]$; | (15) | $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ | su $[0,2]$; | (16) |
| $f(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$ | su $[0, 2\pi]$; | (17) | $f(x) = e^{2x}\sin x$ | su $[0, 2\pi]$; | (18) |

**136.** Utilizzando i risultati dell'**Esercizio 135** dire se esistono i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

dove $f$ è una delle funzioni indicate nello stesso esercizio dai numeri (1), (3)–(6), (9)–(11), (15)–(18).

**137.** Utilizzando i risultati dell'**Esercizio 135** si dica se per le funzioni indicate dai numeri (1)–(12), (15)–(18) esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha} \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = L \in \mathbb{R}^*$$

e, in caso affermativo, determinare $\alpha$ ed $L$.

**138.** (17.2.1997). Determinare le primitive della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$.

**139.** (20.5.1998). Determinare l'insieme delle primitive $H$ della funzione $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $h(x) = x\sin(2x)$.

**140.** (20.5.1998). Mediante integrazione per parti, si determini una primitiva della funzione $f(x) = x^2 e^{-2x}$, e si calcoli $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Si dica inoltre se esiste il

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ed in caso affermativo se ne determini il valore.

**141.** (9.6.1998). Determinare l'insieme delle primitive $H$ della funzione $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $h(x) = xe^{-x^2}$, e calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dire se fra tutte le primitive $H$ ce n'è almeno una per la quale si ha

$$\lim_{x\to+\infty} H(x) = 3.$$

Suggerimento: si consiglia la sostituzione $t = x^2$.

**142.** (8.7.1998). Fra tutte le primitive $F$ della funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}$$

si determini quella per cui $F(0) = 3$ e se ne tracci un grafico approssimativo. Suggerimento: si ricordi il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

**143.** (16.9.1998). Sia

$$f(x) = \int_0^x \frac{5e^t}{2+2e^t}\,\mathrm{d}t$$

per $x \in \mathbb{R}$. Calcolare esplicitamente $f(x)$ e dire se esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 2$. Determinare l'immagine di $f$.

**144.** (16.9.1998). Determinare il dominio della funzione di espressione analitica

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-2}.$$

Disegnare un grafico nel modo piú preciso possibile. Calcolare poi l'area della parte di piano limitata, compresa fra il grafico e gli assi coordinati.

**145.** (14.10.1998). Determinare il dominio della funzione di espressione analitica

$$f(x) = x\sqrt{1-x}$$

e disegnarne il grafico nel modo piú preciso possibile. Calcolare poi l'area della parte di piano limitata, compresa fra il grafico e l'asse delle $x$. Si consiglia di usare la sostituzione $\sqrt{1-x} = t$.

**146.** (2.2.1999). Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1},$$

si dica se $f$ ha asintoti. Per $x \geq 0$ si calcolino

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x^2}.$$

**147.** (23.2.1999). Data la funzione $f$ di espressione analitica

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-2}$$

determinarne dominio, immagine, segno, eventuali asintoti ed altre caratteristiche salienti. Tracciarne un grafico approssimativo. Posto $g(x) = \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$ per $x \geq 2$, determinare esplicitamente l'espressione analitica di $g$, e calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x^2}$$

Detto $L$ il limite precedente, si calcoli anche il

$$\lim_{x\to+\infty} \big(g(x) - Lx^2\big)$$

**148.** (2.6.1999). Fra tutte le primitive $F$ della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di espressione analitica $f(x) = 2x^3 e^{-x^2}$ determinare quella per cui $F(0) = -3$ e calcolare il

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x).$$

**149.** (13.10.1999). Determinare l'insieme delle primitive della funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x\sin\big(x^2\big)$. Stabilire se esiste il

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

motivando la risposta.

**150.** (13.10.1999). Data la funzione $f$ di espressione analitica

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-2}$$

determinarne il dominio, l'immagine e le caratteristiche piú importanti. Tracciarne un grafico approssimativo. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dall'asse delle ascisse, dalle rette di equazione $x = 5$ ed $x = 6$ e dal grafico di $f$.

**151.** (10.5.2000). Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dall'asse delle ascisse, dalle rette di equazione $x = 0$ ed $x = 3$ e dal grafico della funzione di espressione analitica

$$f(x) = e^{2x}\sqrt{e^{2x}-1}.$$

Si cerchi un'opportuna sostituzione.

**152.** (10.5.2000). Tracciare un grafico approssimativo della funzione $f$ data da

$$f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{(u+2)^3}.$$

Ricordare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Qual è il dominio di $f$?

**153.** (7.6.2000). Determinare l'insieme delle primitive delle funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x^2+6x+9} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2+6x+10}$$

**154.** (7.6.2000). Tracciare un grafico approssimativo della funzione $f$ data da

$$f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{\cos(2u)}.$$

Non è necessario determinare esplicitamente l'espressione analitica di $f$; ricordare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Determinare esplicitamente $f$ e da questa espressione dedurne il dominio.

**155.** (12.7.2000). Determinare l'insieme delle primitive della funzione

$$f(x) = x\log(2x+1).$$

**156.** (20.9.2000). Tracciare un grafico approssimativo della funzione $f$ definita da

$$f(x) = \int_0^x te^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Ricordare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

**157.** (20.9.2000). Determinare l'insieme delle primitive della funzione

$$f(x) = (x-1)\log(x+1)$$

ed utilizzare il risultato per determinare l'area della regione finita di piano delimitata dalle rette di equazione $x=0$, $x=3$ e dal grafico di $f$.

**158.** (11.10.2000). Determinare l'insieme delle primitive della funzione $f$ di espressione analitica $f(x) = xe^{4x}$ ed utilizzare il risultato ottenuto per calcolare il

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4}xe^{4x}\right\}.$$

**159.** (21.2.2001). Integrando per parti la funzione $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$, si dimostri che il

$$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f(x)\mathrm{d}x$$

esiste e vale 1. Facoltativo: ottenere lo stesso risultato mediante la sostituzione $x = e^u$.

**160.** (22.5.2001). Tracciare un grafico approssimativo della funzione $f$ di espressione analitica

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 9}$$

determinandone dominio, segno, punti di massimo o di minimo, eventuali asintoti ed altre caratteristiche importanti. Determinare la primitiva $H$ di $f$ tale che $H(3) = 0$.

**161.** (22.5.2001). Si calcoli il

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \left(1 - \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\right) \mathrm{d}t.$$

**162.** (22.5.2001). Si determini l'area della regione finita di piano delimitata dall'asse delle ascisse, dalle rette di equazione $x = 0$ ed $x = \frac{\pi}{2}$ e dalla curva di equazione $y = x\cos(2x)$.

**163.** (6.6.2001). Determinare l'insieme delle primitive della funzione $f$ di espressione analitica

$$f(x) = \log(x^2 + 1)\frac{x}{x^2 + 1}.$$

**164.** (6.6.2001). Si calcoli il valore del

$$\lim_{n \to +\infty} n \int_0^{1/n} \frac{e^t + 1}{e^t} \mathrm{d}t.$$

**165.** (19.9.2001). Studiare la funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 3}$$

determinandone il dominio $D$, il segno, eventuali punti stazionari, flessi, asintoti. Se ne tracci un grafico approssimativo, e si determini l'area della regione finita di piano compresa fra il grafico di $f$, l'asse delle ascisse e le rette di equazione $x = 3$, $x = 4$. (N. B.: non conviene calcolare la derivata seconda).

**166.** (19.9.2001). Si calcoli il valore del

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\log t}{t^3} \, \mathrm{d}t,$$

giustificando i vari passaggi.

**167.** (10.10.2001). Tracciare un grafico approssimativo della funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di espressione analitica

$$f(x) = x^3 e^{-2x},$$

determinando segno, eventuali asintoti, punti di massimo o di minimo, punti di flesso. Dire se esiste il

$$\lim_{A \to \infty} \int_0^A f(x) \, \mathrm{d}x,$$

giustificando tutti i passaggi.

**168.** (10.10.2001). Calcolare
$$\int_0^\pi \sin x \, e^{\cos x} \, \mathrm{d}x.$$

## Equazioni Differenziali

**169.** A variabili separabili. Fare attenzione alle eventuali soluzioni stazionarie.

$$y' = xy^2 \qquad (1) \qquad\qquad y' = \frac{1}{y-x} \quad \text{per } y \neq x \qquad (2)$$

$$y' = x\left(1 + \frac{1}{y}\right) \quad \text{per } y \neq 0 \qquad (3) \qquad\qquad y' = (y+1)\frac{x}{x^2+1} \qquad (4)$$

Suggerimento: nella (2) porre $u = y - x$.

**170.** Lineari del primo ordine.

$$y' = y - x \qquad (1) \qquad\qquad y' + \frac{y}{x + x^2} = x - 2 \quad \text{per } x \in (-1, 0) \qquad (3)$$

$$y' - 2xy = 1 \qquad (2) \qquad\qquad y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sin x} \quad \text{per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \qquad (4)$$

**171.** Problema di Cauchy. Risolvere i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = A \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} y' \sin x = y \log y \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y''(x^2+1) = 2xy' \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \quad (3)$$

Suggerimento: nel problema (3) porre $u = y'$ e risolvere prima l'equazione differenziale risultante in $u$ (che è del primo ordine).

**172.** (22.5.1996). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (4 + y^2)e^x \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Suggerimento: si scelga una sostituzione del tipo $y = au$, per un opportuno valore di $a > 0$.

**173.** (22.5.1996). Durante una reazione chimica la concentrazione di una certa sostanza $C(t)$ varia nel tempo secondo la legge

$$\begin{cases} C'(t) = C(t)(1 - C(t)) \\ C(0) = 0.3. \end{cases}$$

Determinare $C(t)$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t)$.

**174.** (4.6.1996). In un modello di crescita di una popolazione si trova un'equazione differenziale con ritardo del tipo

$$N'(t) = -\frac{\pi}{2T} N(t - T), \qquad T > 0.$$

Provare che le funzioni del tipo $N(t) = a \cos\left(\dfrac{\pi t}{2T}\right)$, $a \in \mathbb{R}$ sono soluzioni dell'equazione.

**175.** (17.9.1996). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y(x)-4} \quad \text{per } x \geq 0, \\ y(0) = a, \end{cases}$$

dove $a$ è un numero reale assegnato. C'è soluzione per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$?

**176.** (8.10.1996). Un processo di natalità-mortalità-immigrazione è descritto dall'equazione differenziale

$$N'(t) = -\lambda N(t) + \nu, \tag{$*$}$$

dove $\lambda > 0$, $\nu > 0$.

1) verificare che fra tutte le soluzioni di $(*)$ una è costante, e calcolarla;
2) detta $c$ la costante del punto precedente, provare che tutte le soluzioni di $(*)$ hanno limite $c$ per $t \to +\infty$;
3) come cambiano le risposte alla precedenti domande se $\lambda = 0$?

**177.** (17.2.1997). Determinare le primitive della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$. Un lago di area $S$ km$^2$ è infestato da una pianta acquatica che, al tempo $t$, misurato in giorni, occupa una superficie di $A(t)$ km$^2$. Sperimentalmente, si trova che la funzione $A(t)$ soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} A'(t) = \alpha A(t)(S - A(t)) \quad \text{per } t \geq 0, \\ A(0) = \dfrac{1}{100} S, \end{cases} \tag{$*$}$$

dove $\alpha = \alpha_0$ è dato. Si dica in quale istante $t_0$ la pianta ha occupato metà del lago. Per tenere sotto controllo la crescita, gli amministratori locali decidono di utilizzare un prodotto chimico il cui effetto è quello di ridurre il valore di $\alpha$ in $(*)$ ad $\dfrac{1}{2}\alpha_0$. Supponendo di usare questo prodotto sin dall'inizio, in quale istante $t_1$ la pianta ha occupato metà del lago? Suggerimento: si risolva direttamente $(*)$, sostituendo il valore di $\alpha$ solo alla fine.

**178.** (17.12.1998). In una certa reazione chimica due sostanze si combinano in quantità uguali. Sapendo che all'inizio sono presenti $A$ grammi della prima sostanza e $B$ della seconda (con $A < B$), e che la quantità di ciascuna sostanza utilizzata al tempo $t$, che chiameremo $y(t)$, soddisfa l'equazione differenziale

$$y'(t) = r\big(A - y(t)\big)\big(B - y(t)\big)$$

dove $r > 0$ è il tasso di reazione, determinare $y(t)$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$. Come diventano le risposte se $A = B$?

**179.** (2.6.1999). Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2xy \log y \\ y(0) = a \end{cases}$$

e si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}^+$ si hanno soluzioni singolari. Disegnare le curve integrali.

**180.** (21.7.1999). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y \cos x = e^{\sin x} \log x \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

**181.** (13.10.1999). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2yy' = 2\sin x\cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

**182.** (22.2.2000). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = \sin^2 x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

**183.** (7.6.2000). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-3)(2x-1) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

**184.** (12.7.2000). In una reazione chimica la concentrazione $C(t)$ di un certo reagente soddisfa l'equazione differenziale

$$C'(t) = \alpha C(t)\big(1 - C(t)\big) \qquad \text{dove} \qquad \alpha = 0.001.$$

Sapendo che $C(0) = 0.05$ determinare $C(100)$.

**185.** (20.9.2000). In una stanza a temperatura ambiente di 20°C viene posto un oggetto a temperatura $T_0 = 30$°C. Sapendo che la temperatura $T(t)$ misurata in °C soddisfa l'equazione differenziale $T'(t) = -\alpha(T(t) - 20)$ (dove $t$ è misurato in secondi, ed $\alpha = 0.005$ sec$^{-1}$) determinare in quale istante $t_1$ la temperatura dell'oggetto è di $T_1 = 20.1$°C. Rispondere alla stessa domanda supponendo che (per $T_0 \geq 20$°C) la $T(t)$ soddisfi l'equazione differenziale $T'(t) = -\beta(T(t) - 20)^2$, dove $\beta = 0.005$ sec$^{-1}$ °C$^{-1}$.

**186.** (11.10.2000). Sapendo che la funzione $y$ soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-3y}{x+2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

determinarne il dominio e calcolare il

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x y(t)\, dt.$$

**187.** (21.2.2001). Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y+2)\cos x \\ y(0) = A \end{cases}$$

quando $A = 0$ e quando $A = -5$.