Esistono piccoli intervalli tra numeri primi consecutivi !

A. Languasco e A. Zaccagnini

La distribuzione dei numeri primi è un problema di grande importanza per la Matematica. Malgrado molti dei risultati che riguardano i numeri primi siano facilmente enunciabili, la loro dimostrazione è, in molti casi, al di là delle attuali conoscenze. Durante il mese appena trascorso, però, un importante teorema è stato dimostrato da D. Goldston (USA), J. Pintz (Ungheria) e C. Yildirim (Turchia).

Il loro risultato riguarda la distribuzione degli intervalli tra due numeri primi consecutivi p_n e p_{n+1}. Ricordiamo che il piú importante teorema nel campo è il Teorema dei Numeri Primi il cui enunciato può essere espresso affermando che, per n molto grande, p_n è approssimativamente uguale a $n \log n$. Ciò suggerisce che $p_{n+1} - p_n$ sia di solito (ossia per la maggior parte degli interi n) dello stesso ordine di grandezza di $\log n$ che, a sua volta non differisce molto da $\log p_n$; d'altra parte esso non fornisce alcuna evidenza del fatto che tale distanza possa anche essere occasionalmente molto piú piccola, anche se ciò dovrebbe accadere piuttosto di rado. In effetti, in accordo con quanto previsto dalla Congettura dei Primi Gemelli, ancor oggi non dimostrata, ci si aspetta che esistano infiniti $n > 1$ per cui la differenza $p_{n+1} - p_n$ sia minimale, ossia sia uguale a 2. Un metodo naturale per studiare l'esistenza di piccole distanze tra primi consecutivi è dunque quello di valutare la quantità

$$E = \liminf_{n \to +\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n}$$

al fine di capire se l'ampiezza $p_{n+1} - p_n$ possa essere minore di $\log p_n$ per infiniti valori di n. Ricordiamo che la definizione del *minimo limite* o liminf di una successione a_n è la seguente

$$\liminf_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \inf_{k \geq n} a_k,$$

ed osserviamo che il Teorema dei Numeri Primi implica che $E \leq 1$ mentre la Congettura dei Primi Gemelli implica che $E = 0$.

La storia dei progressi nello studio di E contiene nomi che appartengono al Gotha della Matematica:

1926: $E \leq 2/3$ (Hardy e Littlewood, assumendo la validità dell'Ipotesi di Riemann Generalizzata);

1940: $E < 1$ (Erdös);

1966: $E \leq 1/2$ e in seguito $E \leq 0.46650\ldots$ (Bombieri e Davenport);

1977: $E \leq 0.44254\ldots$ (Huxley);

1986: $E \leq 0.2486\ldots$ (Maier).

A titolo di cronaca, il problema corrispondente relativo a numeri primi consecutivi "distanti" sembra essere notevolmente piú facile da affrontare: è infatti noto da quasi un secolo che

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n} = +\infty,$$

ed, in realtà, si conoscono perfino risultati leggermente piú forti. Ricordiamo che la definizione di *massimo limite* o limsup è analoga a quella di liminf, e si ottiene cambiando "inf" in "sup" in quella data sopra. Euristicamente, questo risultato dipende dal fatto che è relativamente semplice "costruire" intervalli *senza* numeri primi, usando una sofisticata variante del Crivello di Eratostene, mentre è ben piú difficile costruire coppie di numeri primi "vicini."

Negli anni Ottanta del secolo scorso Goldston iniziò a lavorare su E e nel 2003 i suoi sforzi sembrarono essere coronati da successo quando annunciò, in un articolo in collaborazione con Yildirim, la dimostrazione che $E = 0$. In seguito, purtroppo, un errore in una parte fondamentale del lavoro venne scoperto da A. Granville e K. Soundarajan. L'anno scorso J. Pintz si uní alla collaborazione e, a febbraio 2005, il nuovo team era riuscito ad ottenere una nuova dimostrazione che $E = 0$. Questa volta essa, prima di essere pubblicamente annunciata, fu verificata da diversi teorici dei numeri di livello internazionale ed una sua versione semplificata, scritta da Y. Motohashi (Giappone), venne resa pubblica all'indirizzo web: http://xxx.sissa.it/abs/math/0505300.

Ma che cosa significa il risultato in questione? $E = 0$ vuol dire che per ogni $\epsilon > 0$ esistono infiniti n tali che $p_{n+1} - p_n \le \epsilon \log p_n$. In tal modo è evidente che questo teorema può essere considerato un importante passo verso la dimostrazione della Congettura dei Primi Gemelli.

Questo bel risultato ha sorpreso anche la stessa comunità dei teorici dei numeri perché la sua dimostrazione è un'arguta combinazione di tecniche che sono note a partire dal 1950 (Crivello di Selberg) sebbene, in un punto fondamentale, sia necessario utilizzare anche un profondo risultato di Bombieri e Vinogradov degli anni sessanta. Inoltre, alcune indiscrezioni affermano che Goldston, Pintz e Yildirim abbiano in realtà dimostrato un enunciato piú forte che però è ancora al vaglio della comunità dei teorici dei numeri e che quindi non è per ora stato reso pubblico.

Malgrado non sia chiaro quale sia il limite di questo nuovo metodo e se esso sia applicabile o meno ad altri problemi classici della teoria dei numeri primi, riteniamo che nuove rosee prospettive siano state aperte e che questa affascinante storia possa riservare nel prossimo futuro altre sorprese...
e quindi, rimanete "sintonizzati" !!

Alessandro Languasco
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata,
via Belzoni 7, 35131 Padova
e-mail: languasco@math.unipd.it
webpage: http://www.math.unipd.it/~languasc

Alessandro Zaccagnini
Dipartimento di Matematica,
Parco Area delle Scienze, 53/a – Campus Universitario, 43100 Parma
e-mail: alessandro.zaccagnini@unipr.it
webpage: http://www.math.unipr.it/~zaccagni/home.html