Algoritmo di Euclide, numeri di Fibonacci e frazioni continue

Alessandro Zaccagnini

Sommario

Partendo dal semplice problema concreto del calcolo efficiente del massimo comun divisore fra due interi positivi, si descrive l'Algoritmo di Euclide e se ne fa un'analisi di complessità parziale, scoprendo che il numero di iterazioni necessarie è massimo se gli interi dati sono termini consecutivi della successione dei numeri di Fibonacci. Si interpreta il calcolo come la frazione continua del rapporto fra gli interi dati e si generalizza alle frazioni continue infinite, concludendo con la scoperta che le frazioni continue periodiche hanno valore irrazionale quadratico.

1 L'Algoritmo di Euclide

Problema 1 *Determinare il* massimo comun divisore $d = \operatorname{mcd}(499693, 499691)$.

L'algoritmo insegnato nella scuola media è molto faticoso; gli informatici direbbero che è molto "complesso." Infatti, ricordiamo che si richiede di scomporre in fattori primi i due interi dati, e poi di moltiplicare fra loro i fattori primi comuni, con l'esponente piú piccolo. Il problema di scomporre in fattori primi un intero anche solo moderatamente grande è notoriamente piuttosto difficile. Osserviamo inoltre che l'algoritmo della scuola media è anche parzialmente superfluo: una volta nota la fattorizzazione di uno dei due interi, è sufficiente verificare quali fattori primi dividono l'altro, e con quale esponente. Nel Problema 1 qui sopra i numeri dati sono entrambi primi, e quindi la situazione è particolarmente complicata.

In realtà, esistono diversi semplici algoritmi piú efficienti per calcolare il massimo comun divisore: uno di questi è molto antico e risale ad Euclide (IV–III secolo a. C.). Per poterlo descrivere, introduciamo la notazione per la divisibilità fra interi: scriveremo $d \mid n$ per indicare che *d divide n* cioè che esiste un intero n_0 tale che $n = dn_0$.

L'Algoritmo di Euclide. Tutto si basa su una semplice osservazione:

$$\text{se} \quad d \mid n \quad \text{e} \quad d \mid m \quad \text{allora} \quad d \mid (n-m).$$

Infatti, $d \mid n$ significa che esiste un intero n_0 tale che $n = dn_0$; analogamente esiste un intero m_0 tale che $m = dm_0$. Concludiamo che $n - m = d(n_0 - m_0)$, cioè d divide $n - m$. Dunque, nel problema proposto prima, $d \mid 2$ e cioè $d = 1$ oppure $d = 2$ e possiamo affermare con certezza che $d = 1$ perché gli interi dati sono entrambi dispari. D'ora in poi quando scriveremo $\operatorname{mcd}(n, m)$ supporremo sempre che $n > m \geq 0$.

Ottimizzazione. Naturalmente è possibile *iterare* l'idea di Euclide: in altre parole, la stessa dimostrazione vista sopra ci permette di concludere che se $d \mid n$ e $d \mid m$ allora $d \mid (n-m)$, $d \mid (n-2m)$, $d \mid (n-3m)$, $\dots$, $d \mid (n-qm)$. Il problema è quindi: come scegliere q? Una cosa ragionevole è scegliere q in modo da rendere *minima* la quantità $n-qm$. Quindi q è il *quoziente* ed $n-qm=r$ il *resto* della divisione fra n ed m. Dunque

$$\operatorname{mcd}(n,m) = \operatorname{mcd}(m,r). \tag{1}$$

Nella nuova coppia abbiamo ancora $m > r \geq 0$ ed anche $n > m$. Quindi, in un certo senso il nuovo problema da risolvere è piú semplice del precedente: infatti, possiamo misurare la complessità del problema considerando per esempio il piú grande dei due interi di cui vogliamo calcolare il massimo comun divisore, che abbiamo chiamato n. La relazione (1) garantisce che questa quantità diminuisce ad ogni passo dell'algoritmo di Euclide, e quindi l'algoritmo stesso deve terminare perché, prima o poi, il resto r della divisione, che per definizione è minore di m, vale necessariamente 0 e non c'è bisogno di andare avanti. Per coerenza formale, ed anche per indicare ad un computer quando deve fermarsi, poniamo

$$\operatorname{mcd}(n,0) = n. \tag{2}$$

Un esempio concreto servirà ad illustrare questi fatti.

Esempio pratico. Per calcolare $\operatorname{mcd}(553,154)$ possiamo procedere cosí:

$$\begin{array}{lll}
\operatorname{mcd}(553,154) = \operatorname{mcd}(154,91) & \text{per la (1) poiché} & 553 = 154\cdot 3+91 \\
\operatorname{mcd}(154,\ 91) = \operatorname{mcd}(\ 91,63) & \text{per la (1) poiché} & 154 = \ 91\cdot 1+63 \\
\operatorname{mcd}(\ 91,\ 63) = \operatorname{mcd}(\ 63,28) & \text{per la (1) poiché} & \ 91 = \ 63\cdot 1+28 \\
\operatorname{mcd}(\ 63,\ 28) = \operatorname{mcd}(\ 28,\ 7) & \text{per la (1) poiché} & \ 63 = \ 28\cdot 2+\ 7 \\
\operatorname{mcd}(\ 28,\ \ 7) = \operatorname{mcd}(\ \ 7,\ 0) & \text{per la (1) poiché} & \ 28 = \ \ 7\cdot 4+\ 0 \\
\operatorname{mcd}(\ \ 7,\ \ 0) = 7 & \text{per la (2).} &
\end{array} \tag{3}$$

Dunque l'algoritmo termina con $d=7$. Notiamo che $553 = 7\cdot 79$ e $154 = 2\cdot 7\cdot 11$.

Applicazioni. Citiamo rapidamente due importanti applicazioni pratiche del calcolo del massimo comun divisore. Cominciamo osservando che il *minimo comune multiplo* fra due interi vale $\operatorname{mcm}(n,m) = n\cdot m/\operatorname{mcd}(n,m)$. Inoltre, per risolvere un sistema di congruenze, una modulo n e l'altra modulo m, è necessario determinare due interi λ, μ tali che $\lambda n + \mu m = d = \operatorname{mcd}(n,m)$. L'Algoritmo di Euclide può essere esteso per ottenere anche questi due coefficienti. Ci si può convincere del fatto che non sia una cosa banale cercando di risolvere il quesito qui sotto senza conoscere il "trucco." Daremo una risposta in fondo all'articolo.

Problema 2 *Determinare due interi λ, μ tali che* $43\lambda + 35\mu = 1$.

Il numero delle iterazioni. Per le applicazioni all'informatica e per poter confrontare algoritmi "rivali," si deve misurare in qualche modo il numero delle operazioni necessarie a portare a termine l'esecuzione. Sono possibili diverse unità di misura della complessità: qui ci limitiamo ad un solo aspetto del problema, calcolando il numero massimo di iterazioni, cioè il numero massimo di righe in una tabella come quella qui sopra (3), senza contare l'ultima in cui m vale 0. Vogliamo dunque determinare le coppie di interi che richiedono un dato numero di iterazioni dell'Algoritmo, e fra queste scegliamo la piú *piccola* in un certo senso che andiamo a precisare.

Problema 3 *Dato $t \geq 1$, tra tutte le coppie di interi (n,m) con $n > m > 0$ che richiedono esattamente t iterazioni, trovare quella per cui n è minimo.*

Chiameremo (n_t, m_t) questa coppia "minimale," q_t ed r_t rispettivamente il quoziente ed il resto relativi, in modo che $n_t = q_t m_t + r_t$ con $q_t \geq 1$ e $0 \leq r_t < m_t$. Per esempio, con un po' di pazienza si scopre che $(n_1, m_1) = (2,1)$, $(n_2, m_2) = (3,2)$ ed $(n_3, m_3) = (5,3)$. L'analisi di complessità che faremo comincia da 3 semplici osservazioni che possiamo "verificare" facendo qualche altro esempio numerico.

1. Chiaramente $q_t = 1$, altrimenti $(n_t - (q_t - 1)m_t, m_t)$ è una coppia piú piccola (con $n_t - (q_t - 1)m_t > m_t$) che richiede lo stesso numero di iterazioni. Nell'esempio della Tabella (3) vediamo che la coppia $(553, 154)$ richiede 5 iterazioni, ma anche la coppia $(245, 154) = (553 - 2 \cdot 154, 154)$ ne richiederebbe 5 ed è piú piccola. Lasciamo come esercizio la verifica del fatto che il calcolo di $\mathrm{mcd}(245, 154)$ produce una tabella che differisce dalla (3) solo nella prima riga.

2. Il massimo comun divisore $d_t = \mathrm{mcd}(n_t, m_t)$ vale necessariamente 1. Infatti, d_t divide *tutte* le uguaglianze che compaiono nella corrispondente Tabella (3), e quindi si ottiene una coppia piú piccola semplicemente dividendo tutte le uguaglianze per d_t. Anche in questo caso lasciamo come esercizio la verifica che $(79, 22) = (553/7, 154/7)$ è una coppia che richiede 5 iterazioni, e che la corrispondente Tabella si ottiene dalla (3) dividendo tutti gli n, gli m ed i d per 7.

3. Infine, dobbiamo avere $m_t = n_{t-1}$ ed $r_t = m_{t-1}$, cioè la coppia (n_t, m_t) deve essere uguale ad (n_{t-1}, m_{t-1}), la coppia piú piccola che richiede esattamente $t-1$ iterazioni, anche questo per la definizione stessa, poiché nel passare da (n_t, m_t) ad (m_t, r_t) eseguiamo esattamente una iterazione della formula (1).

Queste osservazioni ci permettono di affermare che i numeri n_t soddisfano un'opportuna *relazione di ricorrenza* di ordine 2, e cioè che è possibile calcolare n_t se si conoscono i valori immediatamente precedenti n_{t-1} ed n_{t-2}. Infatti abbiamo dimostrato che $n_t = m_t + r_t$ (perché $q_t = 1$) $= n_{t-1} + m_{t-1}$ (perché per la terza osservazione $m_{t-1} = r_t$) $= n_{t-1} + n_{t-2}$ (ancora per la terza osservazione perché $m_{t-1} = n_{t-2}$). Infine, ricordiamo che $(n_1, m_1) = (2,1)$ e quindi i *valori iniziali* sono $n_0 = 1$ ed $n_1 = 2$.

Per esempio, un breve calcolo mostra che $(21, 13)$ è la piú piccola coppia che richiede esattamente 6 iterazioni. Dunque $n_6 = 21$, $m_6 = 13$, $r_6 = 8$. Proseguendo abbiamo $\mathrm{mcd}(21, 13) = \mathrm{mcd}(13, 8)$ e quindi $n_5 = m_6 = 13$, $m_5 = r_6 = 8$, $r_5 = 5$. Proseguendo di nuovo, abbiamo $\mathrm{mcd}(13, 8) = \mathrm{mcd}(8, 5)$ e quindi $n_4 = m_5 = 8$, $m_4 = r_5 = 5$, $r_4 = 3$. I passi successivi sono $\mathrm{mcd}(8,5) = \mathrm{mcd}(5,3) = \mathrm{mcd}(3,2) = \mathrm{mcd}(2,1) = \mathrm{mcd}(1,0)$ e a questo punto l'Algoritmo di Euclide termina. La Figura 1 dà un'illustrazione grafica: se si deve calcolare il valore di $\mathrm{mcd}(23, 13)$ i passi successivi sono quelli indicati dalle frecce e cioè $\mathrm{mcd}(13, 10)$, $\mathrm{mcd}(10, 3)$, $\mathrm{mcd}(3, 1)$ ed infine $\mathrm{mcd}(1, 0)$. Su ciascuna riga sono riportate coppie che richiedono lo stesso numero di passi: al piano terra la coppia $(1, 0)$ per la quale è sufficiente il caso base dato dalla formula (2), al primo piano le coppie che richiedono esattamente una iterazione della formula (1) per ricondursi al caso base, al secondo piano quelle che richiedono 2 iterazioni e cosí via.

Le osservazioni qui sopra implicano che nel "nodo" (n,m) con $n > m > 0$ convergono tutte e sole le coppie del tipo $(qn + m, n)$ con $q = 1, 2, 3, \ldots$, poiché il quoziente

$$
\begin{tikzcd}
(8,5) \arrow[d] & (12,7) \arrow[d] & (16,9) \arrow[d] & (11,7) \arrow[d] & (17,10) \arrow[d] & (23,13) \arrow[d] & (14,9) \arrow[d] & (22,13) \arrow[d] & (30,17) \arrow[d] \\
(5,3) \arrow[d] & (7,5) \arrow[d] & (9,7) \arrow[d] & (7,4) \arrow[d] & (10,7) \arrow[d] & (13,10) \arrow[d] & (9,5) \arrow[d] & (13,9) \arrow[d] & (17,13) \arrow[d] \\
(3,2) \arrow[dr] & (5,2) \arrow[d] & (7,2) \arrow[dl] & (4,3) \arrow[dr] & (7,3) \arrow[d] & (10,3) \arrow[dl] & (5,4) \arrow[dr] & (9,4) \arrow[d] & (13,4) \arrow[dl] \\
 & (2,1) \arrow[drrr] & & & (3,1) \arrow[d] & & & (4,1) \arrow[dlll] & \\
 & & & & (1,0) & & & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 1: Una rappresentazione grafica dell'esecuzione dell'Algoritmo di Euclide su coppie di interi piccoli. L'albero ha infinite righe, ciascuna di lunghezza infinita, ed in ciascun "nodo" (n,m) convergono le infinite coppie $(qn+m,n)$ con $q = 1$, 2, $\dots$ All'estrema sinistra di ciascuna riga troviamo la piú piccola coppia che richiede un dato numero di iterazioni

ed il resto della divisione di $qn+m$ per n valgono rispettivamente q ed m, e si può usare la formula (1). Analogamente, nel "nodo" $(1,0)$ convergono tutte e sole le coppie del tipo $(n,1)$ con $n \geq 2$.

2 I numeri di Fibonacci

Consideriamo la successione di interi definita per *ricorrenza* come segue

$$
\begin{cases}
f_0 = 0 \\
f_1 = 1 \\
f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.
\end{cases}
\tag{4}
$$

È stata introdotta nel XIII secolo da Leonardo Pisano, detto Fibonacci, in un problema legato alla crescita di una popolazione di conigli. I primi termini sono

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ \dots$$

Non è un caso se questi interi sono gli stessi che abbiamo visto nel paragrafo precedente, ma per il momento lasciamo da parte questo fatto e limitiamoci a studiare questa successione per il suo interesse intrinseco. Scorrendo la lista notiamo che questi numeri aumentano piuttosto rapidamente (in effetti, ogni termine è quasi il doppio del precedente), e quindi è ragionevole aspettarsi una crescita di tipo esponenziale cioè che $f_n \approx c\lambda^n$ per una qualche costante c ed un valore $\lambda > 1$ per il momento incogniti. Per poter determinare con precisione il loro andamento e "verificare" la congettura, trovando al tempo stesso dei plausibili valori per le quantità incognite c e λ, calcoliamo il rapporto fra due numeri di Fibonacci consecutivi: si veda la Figura 2.

$$
\begin{aligned}
f_2/f_1 &= 1/1 &&= 1\\
f_3/f_2 &= 2/1 &&= 2\\
f_4/f_3 &= 3/2 &&= 1.5\\
f_5/f_4 &= 5/3 &&= 1.666666666\dots\\
f_6/f_5 &= 8/5 &&= 1.6\\
f_7/f_6 &= 13/8 &&= 1.625\\
f_8/f_7 &= 21/13 &&= 1.615384615\dots\\
f_9/f_8 &= 34/21 &&= 1.619047619\dots\\
f_{10}/f_9 &= 55/34 &&= 1.617647059\dots\\
f_{11}/f_{10} &= 89/55 &&= 1.618181818\dots\\
f_{12}/f_{11} &= 144/89 &&= 1.617977528\dots\\
f_{13}/f_{12} &= 233/144 &&= 1.618055556\dots
\end{aligned}
$$

Figura 2: Il rapporto fra due numeri di Fibonacci consecutivi sembra avvicinarsi al valore 1.618 circa

Dividendo la relazione fondamentale $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ per f_{n+1} otteniamo

$$\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = 1 + \frac{f_n}{f_{n+1}}.$$

Se $f_n \approx c\lambda^n$ allora si ha $f_{n+1}/f_n \approx \lambda$ per n "grande" ed anche $f_{n+2}/f_{n+1} \approx \lambda$ e quindi

$$\lambda \approx 1 + \frac{1}{\lambda} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda^2 \approx \lambda + 1.$$

L'equazione $x^2 = x + 1$ ha due soluzioni reali, una positiva e maggiore di 1, l'altra nell'intervallo $(-1, 0)$. Per semplicità chiameremo

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887498948482\dots$$

la piú grande delle due radici dell'equazione $x^2 = x + 1$. L'altra vale $\lambda_2 = -1/\lambda_1 = 1 - \lambda_1 \approx -0.6180339887498948482\dots$

La formula di Binet. Con un po' di pazienza si può dimostrare per induzione che

$$f_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big).$$

Questa formula implica che f_n è l'intero piú vicino a $\lambda_1^n/\sqrt{5}$ dato che $|\lambda_2| < 1$ e le sue potenze tendono a 0 molto rapidamente.

Analisi di complessità dell'Algoritmo di Euclide. Mettendo insieme i risultati ottenuti finora, abbiamo dimostrato che $(n_t, m_t) = (f_{t+2}, f_{t+1})$ e che

$$n_t = f_{t+2} \sim c_1 \lambda_1^t$$

dove $c_1 = \lambda_1^2/\sqrt{5}$. A noi interessa esprimere t in funzione di n_t, e quindi abbiamo bisogno di *invertire* questa relazione. Non è difficile vedere che $t \sim c' \log(n_t)$ dove $c' = 1/\log(\lambda_1) = 2.078086921\dots$ Come conseguenza, questo significa che il numero massimo delle iterazioni dell'Algoritmo di Euclide cresce molto lentamente in funzione degli interi di cui si vuole calcolare il massimo comun divisore, poiché la funzione logaritmo naturale, che stiamo usando qui, cresce con estrema lentezza; osserviamo anche che il risultato è indipendente dalla base dei logaritmi usati per il calcolo.

Questo fatto, unito all'estrema semplicità di ciascuna iterazione (abbiamo visto che è richiesta una semplice divisione con resto) rende l'Algoritmo di Euclide quasi imbattibile in tutte le applicazioni pratiche.

3 Le frazioni continue

Riscriviamo il calcolo del massimo comun divisore fra n_0 ed m_0 in un modo diverso

$$\begin{aligned}\frac{n_0}{m_0} &= q_0 + \frac{r_0}{m_0} = q_0 + \cfrac{1}{\cfrac{m_0}{r_0}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{r_1}{r_0}} \\ &= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{r_2}{r_1}}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{r_3}{r_2}}}} = \dots \end{aligned} \tag{5}$$

in cui $m_0 > r_0 > r_1 > r_2 > r_3 > \dots > 0$. Per semplicità tipografica scriveremo piuttosto $n_0/m_0 = [q_0, q_1, \dots, q_{t-1}, q_t]$. Osserviamo che se $q_t \geq 2$ allora

$$[q_0, q_1, \dots, q_{t-1}, q_t] = [q_0, q_1, \dots, q_{t-1}, q_t - 1, 1].$$

Riprendendo l'esempio descritto nella Tabella 3, troviamo il seguente sviluppo in frazione continua per $553/154 = 79/22$:

$$3 + \cfrac{1}{\cfrac{154}{91}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{91}{63}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{63}{28}}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}}}}.$$

In altre parole si ha $553/154 = 79/22 = [3, 1, 1, 2, 4] = [3, 1, 1, 2, 3, 1]$. Anche le frazioni continue per i numeri razionali, come certi numeri decimali, hanno due forme distinte ma equivalenti: ricordiamo l'uguaglianza

$$0.9999999999\dots = 0.\overline{9} = 1,$$

che può risultare sorprendente a prima vista, ma che si dimostra moltiplicando per 3 ambo i membri dell'identità

$$0.333333333\dots = 0.\overline{3} = \frac{1}{3}. \tag{6}$$

Quest'ultimo esempio è ben noto e familiare fin dalle scuole elementari, ed è uno dei primi casi in cui si incontra l'infinito. Si osservi come il simbolo con infinite cifre a sinistra nella (6) richieda una apposita definizione prima che sia possibile utilizzarlo: le consuete operazioni con i numeri decimali sono valide in prima istanza solo per quelli *finiti* ed è necessario dimostrare che si può operare in modo analogo su quelli infiniti.

L'algoritmo delle frazioni continue per i numeri razionali. Ogni frazione continua finita ha valore razionale, ed ogni numero razionale può essere espresso come frazione continua finita in due modi equivalenti. Data la frazione continua $x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$, poniamo

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_m}}}} = \frac{p_m}{q_m}$$

per $m = 0, 1, 2, \dots, k$. Per le applicazioni pratiche, è utile poter esprimere p_m e q_m nel modo piú semplice possibile. Si può dimostrare che questi numeri soddisfano a loro volta una relazione di ricorrenza di ordine 2 simile a quella dei numeri di Fibonacci:

$$\begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_1 = a_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_{n+2} = a_{n+2} p_{n+1} + p_n \\ q_{n+2} = a_{n+2} q_{n+1} + q_n. \end{cases}$$

Si noti che l'ultima relazione è la stessa sia per la successione dei numeratori p_n che per la successione dei denominatori q_n, mentre sono diversi i valori iniziali.

Per il momento abbiamo parlato di frazioni continue solo nel contesto dei numeri razionali, ma le frazioni continue hanno un'importanza fondamentale nello studio dell'approssimazione di numeri irrazionali per mezzo di numeri razionali. Piú avanti mostreremo l'algoritmo delle frazioni continue per i numeri irrazionali, e cioè vedremo come trovare, dato un numero irrazionale x, la coppia di successioni dei numeratori e dei denominatori, in analogia a quanto visto sopra per i numeri razionali. Fra le numerose proprietà delle frazioni continue ne scegliamo due particolarmenti importanti

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n+1}} \qquad \text{e} \qquad \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1} a_{n+2}}{q_n q_{n+2}}. \tag{7}$$

Queste implicano la catena di disuguaglianze

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots \leq x \leq \cdots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}. \tag{8}$$

In particolare $x - p_n/q_n \to 0$. Queste disuguaglianze, di cui non diamo la dimostrazione, possono essere usate per mostrare che la successione di numeri razionali p_n/q_n con $n = 0, 1, 2, \dots$, fornisce la *migliore approssimazione possibile* al numero x. Piú precisamente, fra *tutte* le frazioni a/b con denominatore $b \leq q_n$, la frazione p_n/q_n è quella che rende *minima* la quantità $|x - a/b|$ e, in particolare, $|x - p_n/q_n| \leq 1/q_n^2$.

Frazioni continue infinite. Finora abbiamo trattato frazioni continue *finite*. Ha senso parlare di frazioni continue *infinite*? In particolare, quanto vale $x = [1, 1, 1, 1, \dots]$? Come nel caso del numero decimale infinito (6), vogliamo dare un significato ad un simbolo infinito, in modo coerente con i corrispondenti simboli finiti. Se un tale x ha senso, chiediamo che $x > 1$ ed inoltre

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Dunque $x^2 = x + 1$, cioè $x = \lambda_1$. Possiamo "giustificare" questo risultato con l'argomentazione seguente. Ricordiamo che $f_4 = 3$ ed $f_5 = 5$ e notiamo che

$$\frac{f_5}{f_4} = \frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{f_4/f_3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{f_3/f_2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{f_2/f_1}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}.$$

Dunque $f_5/f_4 = [1,1,1,1]$. Si può dimostrare facilmente per induzione che

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = [\underbrace{1,1,\ldots,1,1}_{n \text{ volte}}].$$

In un certo senso, quindi, quando n è grande ci aspettiamo che

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = [\underbrace{1,1,\ldots,1,1}_{n \text{ volte}}] \approx \lambda_1 = [\underbrace{1,1,1,1,\ldots}_{\text{infinite volte}}].$$

Piú in generale $x = [a,a,a,\ldots] > a$ soddisfa l'equazione $x^2 = ax + 1$ poiché

$$x = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\ddots}}} = a + \frac{1}{x}.$$

Dunque $x = (a + \sqrt{a^2+4})/2$. Analogamente, possiamo chiederci che valore ha senso attribuire alla frazione continua $[1,2,1,2,1,2,\ldots]$. In generale, $x = [a,b,a,b,\ldots]$ soddisfa $x \geq a$ e $bx^2 = abx + a$ poiché

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\ddots}}} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{x}} = a + \frac{x}{bx+1}.$$

Quindi $x = (ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab})/2b$. Questo si riduce al risultato precedente se $a = b$.

Una frazione continua con antiperiodo. Per determinare il valore della frazione continua $x = [a, 2a, 2a, 2a, \ldots]$ possiamo ragionare in molti modi. Sappiamo già dal calcolo precedente che $y = [2a, 2a, 2a, \ldots] = a + \sqrt{a^2+1}$ e quindi, razionalizzando,

$$x = a + \frac{1}{y} = a + \frac{1}{a + \sqrt{a^2+1}} = a + \frac{\sqrt{a^2+1} - a}{(a^2+1) - a^2} = \sqrt{a^2+1}.$$

In alternativa, come sopra, x soddisfa $x \geq a$ ed $x^2 = a^2 + 1$. Infatti

$$x = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \ddots}}} = a + \frac{1}{2a + (x - a)} = \frac{ax + a^2 + 1}{x + a}$$

e dunque $x^2 + ax = ax + a^2 + 1$. Infine, possiamo notare che $x + a = [2a, 2a, 2a, \dots] = y = a + \sqrt{a^2 + 1}$ e ricavare x.

L'algoritmo delle frazioni continue per i numeri irrazionali. Per $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ costruiamo le successioni

$$\begin{cases} x_0 = x \\ a_n = [x_n] & \text{per } n \geq 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - a_n} & \text{se } x_n \neq a_n, \end{cases} \tag{9}$$

dove $[x]$ indica la *parte intera* di x. Se x è irrazionale, come abbiamo supposto, l'algoritmo qui sopra non può mai terminare. Se invece x fosse razionale, si avrebbe $x_n = a_n$ per qualche n e l'algoritmo terminerebbe. In effetti, sostanzialmente è di nuovo l'algoritmo illustrato nella formula (5), e cioè l'Algoritmo di Euclide, poiché la parte intera qui sopra corrisponde al quoziente delle divisioni successive. Ci si può convincere di questo fatto ricalcolando la frazione continua per $553/154$ con l'algoritmo (9).

La frazione continua per $\lambda_1 = (1 + \sqrt{5})/2$. Usando la definizione (9) con $x = \lambda_1$ si ha $a_0 = 1$ ed

$$x_1 = \frac{1}{\lambda_1 - 1} = \lambda_1 \tag{10}$$

poiché $\lambda_1^2 = \lambda_1 + 1$ da cui $\lambda_1 - 1 = \lambda_1^{-1}$. Quindi $a_n = 1$ ed $x_n = \lambda_1$ per ogni n, come già sapevamo, cioè la frazione continua è periodica con periodo 1.

La frazione continua per $\sqrt{2}$. Usando la definizione (9) con $x = \sqrt{2}$ si ha $a_0 = 1$ ed

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1. \tag{11}$$

Dunque $a_n = 2$ ed $x_n = \sqrt{2} + 1$ per ogni $n \geq 2$. In altre parole, la frazione continua è periodica di periodo 2 ed ha antiperiodo, cioè $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots]$ come visto prima.

La frazione continua per $(1 + \sqrt{3})/2$. Usando la definizione (9) con $x = (\sqrt{3} + 1)/2$ si ha $a_0 = 1$ e quindi

$$x_1 = \frac{1}{(1 + \sqrt{3})/2 - 1} = \sqrt{3} + 1. \tag{12}$$

Da questo ricaviamo $a_1 = 2$ da cui

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = x \tag{13}$$

e la frazione continua ha periodo 2: infatti $\sqrt{3} = [1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$ come già detto.

Una frazione continua con periodo 3. Se $x = [a,b,c,a,b,c,\dots]$ allora $(bc+1)x^2 + (b - abc - a - c)x - ab - 1 = 0$ e quindi, dopo qualche semplificazione

$$x = \frac{abc + a + c - b + \sqrt{(abc + a + b + c)^2 + 4}}{2(a^2+1)}.$$

Se $a = b = c$ questa si riduce alla frazione continua con periodo 1 vista sopra.

In generale, una frazione continua *periodica* x, con eventuale antiperiodo, ha un valore irrazionale quadratico cioè ha la forma $x = (\alpha + \sqrt{\beta})/\gamma$ per opportuni interi α, β e γ, dove β è positivo e non è un quadrato perfetto. Gli esempi qui sopra mostrano come sfruttare la periodicità della frazione continua di x per ottenere una relazione polinomiale in cui x appare al secondo grado.

Il motivo per cui *tutti* gli irrazionali quadratici hanno una frazione continua periodica (l'altra freccia dell'implicazione) è la possibilità di "razionalizzare" illustrata nei nostri esempi dalle formule (10)–(13). La dimostrazione generale di quest'ultima affermazione è piuttosto complicata.

Concludiamo parlando, senza dimostrazione, delle frazioni continue di due dei piú importanti numeri della matematica.

La frazione continua di e. Si conosce la frazione continua del numero di Nepero $e \approx 2.718281828\ldots = [2, \quad 1,2,1, \quad 1,4,1, \quad 1,6,1, \quad 1,8,1, \quad \dots]$. Dunque, per quanto detto sopra, buone approssimazioni razionali per e sono

$$2, \quad 3, \quad 2+\frac{2}{3}, \quad 2+\frac{3}{4}, \quad 2+\frac{5}{7}, \quad 2+\frac{23}{32}, \quad \dots$$

Si conosce anche la frazione continua di $e^{1/h}$ per $h \geq 2$ intero

$$e^{1/h} = [1, h-1, 1, \quad 1, 3h-1, 1, \quad 1, 5h-1, 1, \quad \dots].$$

La frazione continua di π. È noto che $\pi \approx 3.14159265\ldots = [3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,\dots]$ ma non si conosce la regola per generare i termini successivi, anche se ne sono stati calcolati almeno 180 milioni di termini. Dunque, buone approssimazioni razionali per π sono

$$3, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113}, \quad \frac{103993}{33102}, \quad \dots$$

A questo proposito è bene osservare esplicitamente che i troncamenti decimali *non danno necessariamente* la migliore approssimazione possibile. Per esempio, $\pi - 3.14 = \pi - 314/100 \approx 0.0016$, mentre $\pi - 22/7 \approx -0.0013$: in altre parole, l'approssimazione piú "semplice" $22/7$ risulta piú accurata di quella piú "complessa" $314/100 = 157/50$, dove la complessità è misurata dalla grandezza del denominatore.

4 Approfondimenti e letture ulteriori

Algoritmo di Euclide esteso e algoritmi alternativi, fattorizzazione, frazioni continue, analisi di complessità: Languasco & Zaccagnini (2004); numeri di Fibonacci e frazioni continue: Conway & Guy (1999); frazioni continue: Olds (1970). Una risposta al Problema 2 è $-13 \cdot 43 + 16 \cdot 35 = 1$.

J. H. Conway, R. K. Guy (1999). *Il libro dei numeri*. Hoepli, Milano.

A. Languasco, A. Zaccagnini (2004). *Introduzione alla crittografia*. Hoepli, Milano.
C. D. Olds (1970). *Frazioni Continue*. Zanichelli, Bologna.

Alessandro Zaccagnini, Dipartimento di Matematica, Università di Parma, Parco Area delle Scienze 53/a, 43124 Parma. alessandro.zaccagnini@unipr.it