FORMATO A4: ARITMETICA E GEOMETRIA CON UN FOGLIO DI CARTA

Alessandro ZACCAGNINI[1]

"There are more things in heaven and earth, Horatio,
Than are dreamt of in your philosophy."
W. Shakespeare, "Hamlet," Act 1, Scene 5, 166–167

Qualche tempo fa mi è stato chiesto di tenere una conferenza divulgativa, e cosí ho preso il mio blocco per appunti nell'attesa che arrivasse l'idea giusta. Mentre aspettavo l'ispirazione, ho notato che sulla copertina c'è scritto "Formato A4, 210×297 mm." Mi sono accorto che i due numeri 210 e 297 sono entrambi divisibili per 3, ed i quozienti sono rispettivamente 70 e 99, e mi sono ricordato che questa coppia di numeri ha una proprietà piuttosto interessante, per quanto facile da verificare:

$$99^2 - 2 \cdot 70^2 = 1,$$

ed in un momento ho avuto l'idea per questa conferenza.

1 FORMATO A4

Forse non tutti sanno che la carta viene prodotta all'origine in fogli molto grandi, il cosiddetto formato A0. Il lato piú lungo di questi fogli viene poi piegato a metà, ottenendo il formato A1; questi nuovi fogli sono a loro volta dimezzati allo stesso modo, e cosí via: dimezzando sempre il lato piú lungo si ottengono in successione i formati A2, A3 ed infine il comunissimo formato A4. Fin qui niente di particolarmente interessante, se non fosse per il fatto che *le proporzioni* dei fogli sono sempre le stesse, indipendentemente dal formato.

Chiamando i lati come nella Figura 1, vediamo subito che la proporzione fra i lati si conserva passando da un formato al successivo se e solo se vale la relazione

$$a : b = b : \frac{1}{2}a$$

cioè se e soltanto se $a^2 = 2b^2$. In altre parole, il rapporto fra le misure dei due lati a/b deve essere esattamente uguale a $\sqrt{2} = 1.4142135623\dots$ Stando alla copertina del mio blocco per gli appunti, il rapporto fra le misure dei lati dei fogli è $297/210 = 99/70 = 1.41428571\dots$ In effetti questi due numeri sono piuttosto vicini, ma non sono esattamente uguali: se il rapporto fra le misure dei lati fosse uguale a $\sqrt{2}$ ed il lato corto misurasse 210 mm, allora il lato lungo misurerebbe $296.9848\dots$ mm.

Ad un matematico vengono subito in mente alcune domande:

1. Scegliendo altri interi a e b al posto di 99 e 70, può accadere che a/b sia *esattamente* uguale a $\sqrt{2}$?

[1] Dipartimento di Matematica, Università di Parma, via Massimo d'Azeglio 85/A, 43100, Parma
url: http://www.math.unipr.it/~zaccagni/Home.html e-mail: alessandro.zaccagnini@unipr.it

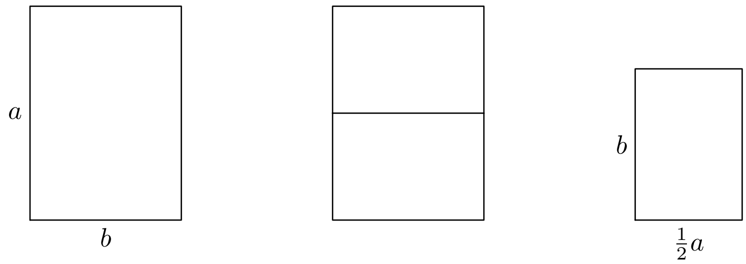


Figura 1: Un foglio nelle proporzioni del formato A4, lo stesso foglio diviso a metà da una linea orizzontale, metà del foglio ruotata di 90°.

2. Si sarebbe potuto fare di meglio, cioè scegliere numeri interi a e b piú piccoli di 99 e 70 rispettivamente, il cui rapporto a/b fosse *piú vicino* a $\sqrt{2}$ di $99/70$?

3. Scegliendo opportunamente gli interi a e b, è possibile avvicinarsi di piú a $\sqrt{2}$?

Nei prossimi paragrafi cercheremo di dare una risposta a tutte queste domande.

2 PITAGORA

La risposta alla prima domanda è negativa e questo fatto è noto all'umanità da oltre 2500 anni. È una questione estremamente profonda ed importante e ne daremo due dimostrazioni, una di tipo aritmetico e risalente secondo la tradizione a Pitagora, ed un'altra di carattere geometrico, che richiede essenzialmente solo di saper piegare un foglio di carta.

La prima delle nostre dimostrazioni procede per assurdo: supponiamo che esistano due interi positivi a e b con la proprietà che $a/b = \sqrt{2}$ esattamente. Se questi interi positivi hanno un qualche fattore comune piú grande di 1, possiamo semplificare la frazione (esattamente come abbiamo fatto sopra, passando da $297/210$ a $99/70$) ottenendo una nuova frazione (che però continuiamo a chiamare a/b) in cui numeratore e denominatore non hanno fattori in comune. Elevando al quadrato e semplificando otteniamo

$$a^2 = 2b^2 \tag{1}$$

e quindi che a è un numero pari (poiché il quadrato di un numero dispari è dispari). In altre parole, esiste un intero c tale che $a = 2c$. Sostituiamo in (1) ed otteniamo

$$4c^2 = 2b^2 \qquad \text{cioè} \qquad 2c^2 = b^2$$

e quindi, *per lo stesso motivo*, anche b deve essere un numero pari. Ma questo contraddice la nostra ipotesi che a e b non avessero fattori comuni a parte 1. Dunque l'ipotesi dell'esistenza di a e b è assurda.

Questa dimostrazione è cosí importante che il grande matematico inglese G. H. Hardy la considera una delle due perle della matematica greca (l'altra è la dimostrazione dell'esistenza di infiniti numeri primi, attribuita ad Euclide), e sono molto significative le parole che usa per descriverle: "Ciascuna di esse conserva la freschezza e l'importanza di quando è stata scoperta: duemila anni non vi hanno lasciato una ruga."

La dimostrazione del fatto che la diagonale di un quadrato ed il suo lato sono *incommensurabili*, cioè che non esiste un sottomultiplo comune dei due segmenti, provocò una grave crisi della filosofia pitagorica, basata sull'idea che gli interi ed i loro rapporti fossero sufficienti a spiegare l'universo. Una leggenda vuole che in onore di questa scoperta fosse sacrificata un'ecatombe (cioè 100 buoi), mentre altre riportano la morte del discepolo responsabile della divulgazione del segreto. Dunque, *nessuna* frazione a/b dove a e b sono interi positivi è *esattamente* uguale a $\sqrt{2}$. Il problema è legato al triangolo rettangolo isoscele,

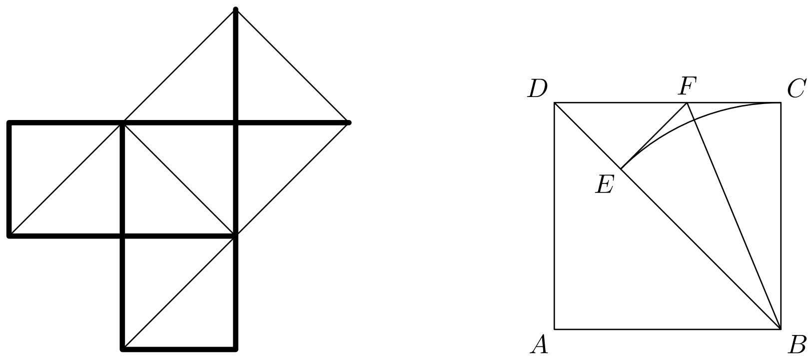


Figura 2: (a) Come dimostrare che vale il Teorema di Pitagora per i triangoli rettangoli isosceli contando mezze piastrelle di un pavimento con mattonelle quadrate. (b) Dimostrazione geometrica dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$: se $\overline{BD} = a$ e $\overline{BC} = b$, allora $\overline{DF} = 2b - a$ e $\overline{DE} = a - b$.

dato che per il Teorema di Pitagora se b è la misura della lunghezza del cateto di un tale triangolo, ed a è la misura dell'ipotenusa, allora a e b sono legati dalla relazione (1). Lucio Russo, in un bellissimo saggio sulla scienza nell'antica Grecia [9], osserva che per accorgersi che fra cateti ed ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele vale la relazione (1) non è necessario conoscere il Teorema di Pitagora in generale, ma è sufficiente guardare un pavimento piastrellato con mattonelle quadrate, come nella Figura 2(a).

Come promesso, ora diamo anche la dimostrazione geometrica illustrata dalla Figura 2(b): disegniamo un quadrato $ABCD$ ed una delle sue diagonali BD. Con un compasso riportiamo la misura del lato BC sulla diagonale e dal punto di intersezione E fra la circonferenza e la diagonale tracciamo la perpendicolare alla diagonale, fino ad incontrare il lato CD in F. I triangoli BCD e DEF sono entrambi rettangoli isosceli. Se i cateti fossero commensurabili con la diagonale, potremmo trovare interi a e b tali che $\overline{BD} = a$ e $\overline{BC} = b$. Possiamo supporre che a e b siano i piú piccoli possibili, o, in altre parole, che non abbiano fattori in comune piú grandi di 1. Ma la misura di DE è un intero (infatti $\overline{DE} = a - b$) ed anche la misura di DF è un intero (e infatti $\overline{DF} = \overline{CD} - \overline{FC} = \overline{CD} - \overline{EF} = 2b - a$, poiché i triangoli rettangoli BCF e BEF sono uguali). Dunque abbiamo trovato un assurdo, poiché per ipotesi a e b erano stati scelti come gli interi piú piccoli tali che $a/b = \sqrt{2}$.

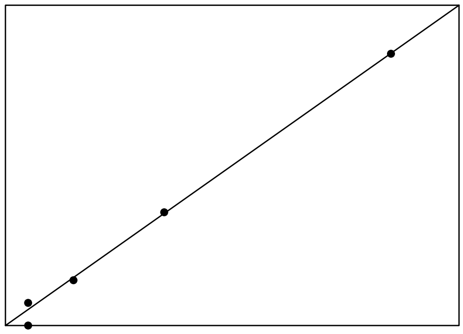
3 ARCHIMEDE

Ora sappiamo che l'equazione (1) non ha soluzioni in interi positivi x, y. Proprio all'inizio di questa conferenza abbiamo notato che c'è una coppia di numeri interi che *quasi* soddisfa l'equazione (1), nel senso che il primo membro risulta essere uguale ad 1. Una domanda abbastanza naturale che ci si può fare è se esistano o meno altre coppie di *quasi soluzioni* dell'equazione (1). Per essere piú precisi e piú generali, ci facciamo questa domanda: è vero che esistono infinite coppie di interi non negativi (x, y) che soddisfano l'equazione

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1 \qquad ? \tag{2}$$

Con un po' di pazienza, un calcolo con numeri piccoli ci dà le seguenti soluzioni:

n	0	1	2	3	4	5	6
x	1	1	3	7	17	41	99
y	0	1	2	5	12	29	70
s	1	-1	1	-1	1	-1	1



n	x	y	x/y
1	1	1	1.000000000
2	3	2	1.500000000
3	7	5	1.400000000
4	17	12	1.416666666
5	41	29	1.413793103
6	99	70	1.414285714

Figura 3: Il grafico delle prime soluzioni intere dell'equazione (2). Si vedono i semiassi cartesiani positivi, la retta di equazione $y = x/\sqrt{2}$ ed i punti (x_n, y_n) per $n = 0, \ldots, 4$ ricavati dalla tabella a fianco. Si noti che questi punti sono alternativamente *sotto* e *sopra* la retta, e sempre piú vicini ad essa.

La prima riga di questa tabella dà semplicemente il numero progressivo, la seconda e la terza riga i valori di x ed y che risolvono l'equazione (2), e l'ultima dà il *segno* della soluzione, e cioè il valore di $x^2 - 2y^2$. Naturalmente ci chiediamo se e come sia possibile estendere ulteriormente questa tabella, e se questa contenga davvero tutte le soluzione *piccole* (quelle con $0 < x < 100$) come affermato sopra. Fra l'altro la tabella qui sopra sembra suggerire che x ed y crescano piuttosto rapidamente e che i segni cambino sempre da una soluzione alla successiva.

Vale certamente la pena di osservare che le soluzioni (x, y) elencate qui sopra forniscono approssimazioni sempre migliori per il numero $\sqrt{2}$, alternativamente per difetto e per eccesso. Escludendo la soluzione indicata con il numero 0, questo fatto è illustrato nella tabella in Figura 3.

Non è difficile dimostrare che queste soluzioni danno valori approssimati per eccesso e per difetto a $\sqrt{2}$ sempre migliori: se (x, y) soddisfano (2) con il segno $+$ allora

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2 = \frac{1}{y^2} \quad \text{e quindi} \quad \left(\frac{x}{y} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{x}{y} + \sqrt{2}\right) = \frac{1}{y^2}.$$

Inoltre, possiamo anche affermare che $x^2 = 2y^2 + 1 > 2y^2$ da cui $x > y\sqrt{2}$, cioè $x/y > \sqrt{2}$. Quindi, sostituendo, otteniamo

$$0 < \frac{x}{y} - \sqrt{2} = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{(x/y) + \sqrt{2}} < \frac{1}{2\sqrt{2}y^2}, \tag{3}$$

cioè in questo caso x/y è un'approssimazione per eccesso di $\sqrt{2}$. Calcoli analoghi portano a concludere che se l'equazione (2) vale con il segno $-$, allora x/y è un'approssimazione per difetto. In entrambi i casi, è evidente che questa approssimazione è tanto migliore quanto piú grande è y. Possiamo divertirci a riportare le soluzioni dell'equazione (2) date nella tabella qui sopra in un grafico cartesiano: si veda la Figura 3.

Per poter proseguire nel nostro studio dell'equazione (2), facciamo una osservazione la cui validità generale non dimostriamo: è possibile ricavare la x di una certa soluzione conoscendo la x delle *due* soluzioni precedenti, e lo stesso vale per la y. Infatti, i dati nella nostra tabella qui sopra soddisfano le relazioni ricorrenti

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= x_n + 2x_{n+1} \\ y_{n+2} &= y_n + 2y_{n+1} \end{aligned} \tag{4}$$

per $n \geq 0$. Questo suggerisce che la prossima soluzione debba essere $x_7 = 41 + 2 \cdot 99 = 239$, $y_7 = 29 + 2 \cdot 70 = 169$. In effetti la verifica che questa è davvero una soluzione dell'equazione (2) è pressoché immediata.

Non è possibile dare qui una dimostrazione completa del fatto che *tutte* le soluzioni dell'equazione (2) si ottengono come indicato, ma non è difficile dimostrare che questo procedimento dà sempre nuove soluzioni, e quindi che è possibile estendere la nostra tabella qui sopra indefinitamente. Lo strumento principe per questo tipo di dimostrazioni è la cosiddetta *induzione matematica*. Verifichiamo che una certa affermazione che riguarda numeri interi è soddisfatta per $n = 0$, e poi che se ne supponiamo la validità per un certo intero, allora è valida per l'intero successivo. In questo caso particolare, poiché le formule (4) coinvolgono i *due* interi precedenti, è necessario verificare la nostra affermazione per $n = 0$ ed $n = 1$ (cosa che lasciamo per esercizio), e supporre la validità delle formule (4) per due interi consecutivi per poi passare all'intero successivo.

Ora possiamo procedere come segue: supponiamo che (x_n, y_n) ed (x_{n+1}, y_{n+1}) siano soluzioni dell'equazione (2), la prima con il segno $(-1)^n$ e la seconda con il segno $(-1)^{n+1}$. Con i valori di x_{n+2} e di y_{n+2} dati dalle relazioni (4) abbiamo

$$\begin{aligned}
x_{n+2}^2 - 2y_{n+2}^2 &= (x_n + 2x_{n+1})^2 - 2(y_n + 2y_{n+1})^2 \\
&= x_n^2 + 4x_nx_{n+1} + 4x_{n+1}^2 - 2(y_n^2 + 4y_ny_{n+1} + 4y_{n+1}^2) \\
&= (x_n^2 - 2y_n^2) + 4(x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2) + 4(x_nx_{n+1} - 2y_ny_{n+1}) \\
&= (-1)^n + 4(-1)^{n+1} + 4(x_nx_{n+1} - 2y_ny_{n+1}).
\end{aligned}$$

Come possiamo vedere, la dimostrazione non funziona se non conosciamo un'altra proprietà delle soluzioni (x_n, y_n) ed (x_{n+1}, y_{n+1}) (che è quella che ci garantisce che si tratta proprio di soluzioni consecutive) e cioè

$$x_nx_{n+1} - 2y_ny_{n+1} = (-1)^n. \tag{5}$$

Naturalmente dovremo verificare che (5) vale anche per $n = 0$ ed $n = 1$ (esercizio), e che se vale per un certo n e per $n+1$, allora vale anche per $n+2$: infatti dalle (4)

$$\begin{aligned}
x_{n+1}x_{n+2} - 2y_{n+1}y_{n+2} &= x_{n+1}(x_n + 2x_{n+1}) - 2y_{n+1}(y_n + 2y_{n+1}) \\
&= (x_nx_{n+1} - 2y_ny_{n+1}) + 2(x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2) \\
&= (-1)^n + 2(-1)^{n+1} \\
&= (-1)^n(1-2) = (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque trovato un metodo per determinare infinite soluzioni intere dell'equazione (2). Però si può subito notare un difetto di questo metodo: per trovare una soluzione è necessario determinare prima *tutte* quelle che la "precedono." È abbastanza naturale chiedersi se sia possibile determinare *direttamente* ogni soluzione dell'equazione (2). La risposta a questa domanda è positiva e vale, piú in generale, per ogni formula ricorrente del tipo (4). Poniamo λ^2 al posto di x_{n+2}, λ al posto di x_{n+1} ed 1 al posto di x_n nella prima delle relazioni (4): questo ci dà l'*equazione caratteristica* della ricorrenza

$$\lambda^2 = 1 + 2\lambda \tag{6}$$

che ha le soluzioni $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$. Poi si cercano costanti α e β che soddisfano l'equazione

$$x_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$$

per $n = 0$ e per $n = 1$. Un semplice calcolo mostra che $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, e quindi

$$x_n = \frac{1}{2}\Big\{\big(1+\sqrt{2}\big)^n + \big(1-\sqrt{2}\big)^n\Big\}. \tag{7}$$

Analogamente si ricava

$$y_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\Big\{\big(1+\sqrt{2}\big)^n - \big(1-\sqrt{2}\big)^n\Big\}. \tag{8}$$

Si può dimostrare che questi (x_n, y_n) soddisfano l'equazione (2), e cioè che $x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n$, sfruttando il fatto che λ_1 e λ_2 soddisfano l'equazione (6) e quindi $\lambda_1\lambda_2 = -1$. La dimostrazione del fatto che il metodo illustrato per risolvere le ricorrenze binarie come le (4) funziona in generale non è difficile, ma esula dall'argomento centrale di questa conferenza.

Le relazioni (3) e (8) ci permettono di dare un'interpretazione quantitativa alla nostra affermazione che i rapporti x_n/y_n si avvicinano sempre di piú a $\sqrt{2}$: infatti, $|\lambda_2| < 1$ e quindi $y_n \approx \sqrt{2}\lambda_1^n/4$. Un breve calcolo dà

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2\sqrt{2}y_n^2} \approx \frac{2\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^{2n}}. \tag{9}$$

In effetti, esiste anche un'altra relazione fra i valori di x_n e di y_n, piú semplice di quella discussa sopra, ma coinvolge simultaneamente le due successioni:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases} \tag{10}$$

Si osservi incidentalmente che dalle (10) è possibile ricavare le relazioni (4). Il vantaggio di questa nuova coppia di relazioni risiede nel fatto che, dati x_{n+1} ed y_{n+1}, è possibile risalire facilmente ad (x_n, y_n) e questo ci permette di dimostrare che la costruzione data sopra fornisce *tutte* le soluzioni dell'equazione (2). Molto brevemente, dalle relazioni (10) possiamo ricavare

$$\begin{cases} x_n = 2y_{n+1} - x_{n+1} \\ y_n = x_{n+1} - y_{n+1} \end{cases}$$

Forse qualcuno ha una sensazione di *dejà vu*: in effetti, e non per caso, queste sono esattamente le relazioni che abbiamo trovato nella Figura 2(b)! Con le dovute cautele, data una qualunque soluzione (x, y) dell'equazione (2), questa osservazione permette di ricavarne una piú "piccola," e partendo da questa ne possiamo calcolare un'altra, e cosí via. Poiché questo procedimento deve terminare, prima o poi si deve necessariamente raggiungere la soluzione $(x_0, y_0) = (1, 0)$, ossia, la costruzione vista prima fornisce proprio tutte le soluzioni cercate.

4 ISAAC NEWTON

Abbiamo appena visto come costruire una coppia di successioni di numeri interi i cui rapporti si avvicinano molto rapidamente a $\sqrt{2}$. Ma sarà possibile fare ancora meglio di cosí? La risposta è positiva, e dipende da un'idea di Newton, probabilmente mutuata dal matematico greco Erone. Possiamo ragionare come segue: se α è una buona approssimazione di $\sqrt{2}$, diciamo per eccesso, allora $2/\alpha$ è un'approssimazione per difetto, e possiamo sperare che la media fra queste due quantità

$$\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{2}{\alpha}\right) = \frac{\alpha^2 + 2}{2\alpha} \tag{11}$$

sia un'approssimazione migliore di entrambe. Daremo piú avanti una dimostrazione geometrica di questo fatto (cfr Figura 4): per ora notiamo che quanto detto suggerisce di introdurre una nuova successione definita da

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1, \\ \alpha_{n+1} = \dfrac{\alpha_n^2 + 2}{2\alpha_n}. \end{cases}$$

Poiché questa è una successione di numeri razionali, possiamo scomporla nella coppia di successioni dei numeratori e dei denominatori

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} q_0 = 1 \\ q_{n+1} = 2p_nq_n \end{cases} \tag{12}$$

in modo che $\alpha_n = p_n/q_n$. E qui arrivano le sorprese! Calcoliamo i primi termini di questa coppia di successioni e otteniamo la tabella seguente

n	0	1	2	3	4	5
p	1	3	17	577	665857	886731088897
q	1	2	12	408	470832	627013566048

Tanto per cominciare questi numeri crescono molto rapidamente; inoltre, si verifica immediatamente che, nella notazione del paragrafo precedente, $p_0 = x_1$, $p_1 = x_2$, $p_2 = x_4$ e con un po' di pazienza che $p_3 = x_8$, $p_4 = x_{16}$ e $p_5 = x_{32}$. Naturalmente, le stesse relazioni valgono fra q ed y. Questo è un caso o c'è qualche motivo?

Si può dimostrare per induzione usando le (7)–(8) che se $(p_n, q_n) = (x_m, y_m)$ allora $(p_{n+1}, q_{n+1}) = (x_{2m}, y_{2m})$. Quindi, partendo da $(p_0, q_0) = (x_1, y_1)$, si ha $(p_n, q_n) = \bigl(x_{2^n}, y_{2^n}\bigr)$ per ogni $n \geq 0$. Dato che, come abbiamo mostrato sopra, la successione x_m/y_m tende a $\sqrt{2}$ esponenzialmente, la successione p_n/q_n tende a $\sqrt{2}$ in maniera doppiamente esponenziale: dalla (9) si ricava immediatamente

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}\right| \approx \frac{2\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^{2^n}}.$$

La stessa cosa può essere messa in modo leggermente diverso: posto $\delta_n = \bigl(p_n/q_n\bigr)^2 - 2 = q_n^{-2}$, usando le ricorrenze (12) si ottiene per $n \geq 1$

$$\delta_{n+1} = \frac{\delta_n^2}{4(2+\delta_n)} < \frac{1}{8}\delta_n^2$$

poiché $\delta_n > 0$ per ogni $n \geq 1$. In altre parole, se ad un certo passo dell'algoritmo conoscete le prime k cifre decimali di $\sqrt{2}$, al passo successivo conoscerete le prime $2k$ cifre decimali di $\sqrt{2}$. Come esercizio sull'induzione, non è difficile dimostrare che, per $n \geq 1$ si ha $\delta_n \leq 2^{-a_n}$, dove $a_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 3$ soddisfa la ricorrenza $a_{n+1} = 2a_n + 3$, ed $a_1 = 2$.

Concludiamo questo paragrafo illustrando molto rapidamente il principio del funzionamento dell'algoritmo di Newton, riferendoci alla Figura 4. Posto $f(x) = x^2 - 2$, partendo dal punto $\bigl(\alpha_0, f(\alpha_0)\bigr) = (1, -1)$ tracciamo la retta tangente al grafico di f, che ha equazione $y = g_0(x) = 2x - 3$. Questa retta interseca l'asse delle x nel punto $(\alpha_1, 0) = \bigl(3/2, 0\bigr)$. Ora ricominciamo: dal punto $\bigl(\alpha_1, f(\alpha_1)\bigr) = \bigl(3/2, 1/4\bigr)$ tracciamo la tangente al grafico di f, di equazione $y = g_1(x) = 3x - 17/4$. Questa interseca l'asse delle x nel punto $(\alpha_2, 0) = \bigl(17/12, 0\bigr)$, e cosí via…

5 LEONARDO PISANO DETTO FIBONACCI, LUCA PACIOLI E GLI ALTRI

Prima di concludere ci concediamo una brevissima digressione: probabilmente la piú famosa ricorrenza del tipo (4) è quella attribuita a Leonardo Pisano detto Fibonacci (colui che introdusse le cifre arabe in Europa fra il XII ed il XIII secolo), relativamente al problema della riproduzione dei conigli:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+2} = x_n + x_{n+1} \end{cases}$$

che comincia con 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …Procedendo come sopra, si trova che la soluzione di questa ricorrenza è data da

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

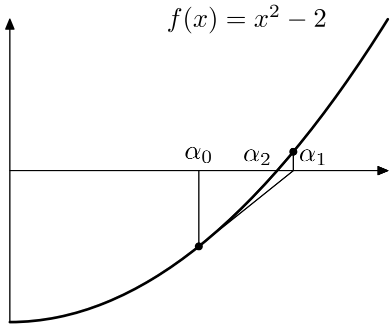


Figura 4: I primi passi dell'algoritmo di Newton, a partire da $\alpha_0 = 1$. Sono stati evidenziati i punti di coordinate $(\alpha_0, 0)$, $(\alpha_1, 0)$ ed $(\alpha_2, 0)$ e sono state tracciate parti delle rette di equazione $y = g_0(x)$ ed $y = g_1(x)$. Quest'ultima ha un grafico praticamente indistinguibile da quello di f nell'intervallo $[\sqrt{2}, \alpha_1]$.

Il numero $\phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ è detto *sezione aurea* ed è legato al rapporto fra diagonale e lato di un pentagono regolare. Secondo gli antichi, il rettangolo dalla forma piú gradevole è quello per cui il rapporto fra le misure dei lati vale esattamente ϕ. Luca Pacioli nel Cinquecento scrisse il saggio *De Divina Proportione* per descriverne le proprietà; forse qualcuno ricorda il suo ritratto sulle monete da 500 L. coniate dalla Zecca nel 1994. Secondo la tradizione il rapporto fra le misure della base e dell'altezza nel Partenone e nell'Ultima Cena valgono entrambi ϕ.

6 APPROFONDIMENTI

In questo paragrafo finale raccogliamo molto brevemente qualche spunto per una riflessione ulteriore sugli argomenti di questa conferenza. Naturalmente non c'è alcuna pretesa di completezza: si vogliono semplicemente segnalare alcuni possibili sviluppi delle idee qui esposte. Il problema di cui abbiamo parlato, come si vede, ha rilevanza in vari campi della matematica: l'algebra, l'analisi matematica, l'analisi numerica, la geometria euclidea, l'approssimazione diofantea.

6.1 TRIANGOLI ISOSCELI

Osserviamo che un triangolo isoscele con lati di lunghezza y, y ed x, dove (x, y) è una soluzione dell'equazione (2), è "quasi" rettangolo. Infatti, detto α l'angolo opposto al lato di lunghezza x, per il Teorema di Carnot si ha $\cos\alpha = \dfrac{\mp 1}{2y^2}$, e quindi α è prossimo ad un angolo retto.

6.2 TEOREMA DI GAUSS

Usando le idee di Pitagora, Gauss ha dimostrato il seguente

Teorema 1 *Se a_0, a_1, …, a_n sono numeri interi privi di fattori comuni maggiori di 1, dove a_0 ed a_n non sono nulli, e se $x = p/q$ è una radice razionale dell'equazione polinomiale*

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

(con p e q interi primi fra loro, $q \neq 0$) allora p divide a_0 e q divide a_n.

"This was sometime a paradox, but now the time gives it proof."
W. Shakespeare, "Hamlet," Act 3, Scene 1, 114.

Per la dimostrazione, che si basa essenzialmente sulla divisibilità, si veda Hardy & Wright [5], Teorema 45. In particolare, se $n = 2$, $a_2 = 1$, $a_1 = 0$ ed $a_0 = -N$, questo Teorema ci dice che un'eventuale soluzione razionale $x = p/q$ con $(p,q) = 1$ di $x^2 = N$ ha necessariamente $q = 1$ (cioè è intera) e quindi $N = p^2$, cioè una soluzione razionale esiste se e solo se N è un quadrato perfetto.

6.3 UNITÀ IN UNA ESTENSIONE DI Z

Le soluzione dell'equazione (2) ci danno l'insieme delle *unità* nell'anello $\mathbb{Z}\big[\sqrt{2}\big]$, cioè quegli elementi che hanno un inverso moltiplicativo. Infatti, se $x+y\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\big[\sqrt{2}\big]$ è invertibile, esiste $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\big[\sqrt{2}\big]$ tale che $\big(x+y\sqrt{2}\big)\big(a+b\sqrt{2}\big) = 1$, da cui otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} ax+2by = 1 \\ ay+bx = 0 \end{cases} \qquad \text{dove } x,\ y,\ a,\ b \in \mathbb{Z}.$$

Dalla prima equazione ricaviamo immediatamente che a e b sono interi primi fra loro (un eventuale fattore comune piú grande di 1 dividerebbe il primo membro e quindi anche il secondo), e, per lo stesso motivo, anche x ed y sono primi fra loro. La seconda equazione quindi implica che a divide x e, per simmetria, che x divide a. In definitiva $a = \pm x$, $b = \mp y$ e, sostituendo nella prima equazione, troviamo $\pm(x^2 - 2y^2) = 1$, che è l'equazione (2). Il viceversa, invece, è immediato. In questo anello, dunque, ci sono infinite unità.

6.4 FRAZIONI CONTINUE E APPROSSIMAZIONE DIOFANTEA

Il procedimento illustrato dalle formule (10) deriva in ultima analisi dalla struttura periodica della frazione continua per $\sqrt{2} = \big[1,\overline{2}\big]$, nella notazione tipica del contesto. Fra l'altro questo significa che la successione delle soluzioni dell'equazione (2) fornisce le *migliori* approssimazioni razionali possibili a $\sqrt{2}$ (cfr la domanda 2 all'inizio). Per ulteriori informazioni, si vedano Conway & Guy [2], Capp. 6 e 7, oppure Hardy & Wright [5], Cap. 10. In quest'ultimo si trovano le dimostrazioni di tutte le asserzioni non dimostrate qui sopra. Osserviamo che la relazione (9) (che è essenzialmente un'uguaglianza) ci dice che non è possibile approssimare $\sqrt{2}$ piú rapidamente di cosí: questo vale in generale per *tutti* i numeri irrazionali che sono soluzioni di equazioni polinomiali di secondo grado a coefficienti interi, incluso il numero ϕ, a parte per il valore della costante.

6.5 L'EQUAZIONE (2) IN GENERALE

Le equazioni del tipo (2), nella forma piú generale

$$x^2 - Ny^2 = k \tag{13}$$

si chiamano tradizionalmente equazioni di Pell, dal nome del matematico inglese che le avrebbe studiate per primo, ma certamente erano note ad Archimede che propose il problema di risolvere un'equazione di questo tipo che ha soluzioni enormi. Abbiamo studiato solo il caso $N = 2$, $k = \pm 1$, ma questo può essere in parte generalizzato al caso in cui N non è un quadrato perfetto, ed a certi valori di k. Per esempio, quanto appena detto per l'equazione (2) si applica in generale all'equazione (13) con $k = \pm 1$ ed N qualsiasi non quadrato perfetto (ma l'equazione (13) con $k = -1$ può non avere soluzioni). Un metodo alternativo per risolvere l'equazione (2) quando $k = 1$ è questo: trovata *la piú piccola* soluzione (x_1, y_1) di (13) con $y_1 > 0$ (poiché $(1,0)$ è sempre una soluzione) le altre si ottengono cosí:

$$\pm 1 = x_1^2 - Ny_1^2 = \big(x_1 - y_1\sqrt{N}\big)\big(x_1 + y_1\sqrt{N}\big) \text{ da cui } \begin{cases} x_n - y_n\sqrt{N} = \big(x_1 - y_1\sqrt{N}\big)^n \\ x_n + y_n\sqrt{N} = \big(x_1 + y_1\sqrt{N}\big)^n \end{cases}$$

Da queste è immediato ricavare le analoghe delle relazioni (7)–(8). Per trovare la piú piccola soluzione dell'equazione (13) si può per esempio sviluppare $\sqrt{N}$ in frazione continua. Si osservi che se $N = m^2$ con m intero, allora l'equazione (13) si può scrivere $(x - my)(x + my) = k$ e questa ha necessariamente un numero finito di soluzioni, in evidente contrasto con la situazione in cui N non è un quadrato perfetto.

6.6 RICORRENZE BINARIE

Il procedimento illustrato qui funziona in generale per qualsiasi ricorrenza binaria del tipo $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$, ma qualche volta le formule possono coinvolgere numeri complessi. Si veda il Cap. 7 di Conway & Guy [2].

6.7 SEZIONI DI DEDEKIND

Un esempio classico di sezione di Dedekind è dato dagli insiemi $S = \mathbb{Q}^- \cup \{q \in \mathbb{Q} \colon q^2 < 2\}$, $T = \mathbb{Q} \setminus S$. In un certo senso possiamo dire che le relazioni (4) ci danno un modo "costruttivo" per determinare S e T. Piú precisamente,

$$S = \bigcup_{n \geq 0} \left\{ q \in \mathbb{Q} \colon q \leq \frac{x_{2n+1}}{y_{2n+1}} \right\} \qquad T = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ q \in \mathbb{Q} \colon q \geq \frac{x_{2n}}{y_{2n}} \right\}.$$

6.8 ALGORITMO DI NEWTON

In generale, l'algoritmo di Newton (o delle tangenti) permette di determinare approssimativamente una soluzione x_0 dell'equazione $f(x) = 0$ dove f è una funzione convessa. Se f è anche derivabile ed $f' \neq 0$, l'equazione della ricorrenza risulta essere

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{14}$$

Si noti che se $f(x) = x^2 - 2$ (il caso discusso nel testo) si ha $f'(x) = 2x$ e quindi la (14) si riduce alla (11). La (11) ci dice che $\sqrt{2}$ è un punto fisso della ricorrenza. Nel caso in cui $f(x) = x^2 - \gamma^2$, dove $\gamma > 0$ è un numero reale, la ricorrenza

$$\begin{cases} x_0 = \alpha > 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + \gamma^2}{2x_n} \end{cases} \qquad \text{ha la soluzione} \qquad x_n = \gamma \frac{(\alpha + \gamma)^{2^n} + (\alpha - \gamma)^{2^n}}{(\alpha + \gamma)^{2^n} - (\alpha - \gamma)^{2^n}},$$

e quindi ha il punto fisso attrattivo γ qualunque sia $\alpha > 0$.

6.9 ALTRE OSSERVAZIONI

Non è difficile notare che le successioni (p_n, q_n) soddisfano altre proprietà di ricorrenza. Per esempio, per $n \geq 1$ si ha $p_{n+1} = 2p_n^2 - 1$ e $q_{n+1} = 2^n p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$, oppure $q_{n+1}^2 = 2p_n^2(p_n^2 - 1)$. Questo rende immediatamente evidente il fatto che le due successioni crescono in modo estremamente rapido. Sarebbe piú semplice in qualche dettaglio porre $\alpha_0 = 2$, dopodiché tutto resta immutato, ma questo non si adatta bene al resto del discorso. È bene osservare che qui abbiamo sottolineato la bontà delle approssimazioni che si trovano in funzione del numero di passi degli algoritmi proposti, con un approccio che potremmo definire da analista numerico. Se avessimo affrontato il problema dal punto di vista dell'approssimazione diofantea, avremmo dovuto invece concentrarci sulla dipendenza dell'approssimazione dal denominatore y nella (3), per esempio, e da questo punto di vista, invece, $\sqrt{2}$ e ϕ non sono molto bene approssimabili (come segue dal fatto che la loro frazione continua è periodica) dato che l'errore è essenzialmente uguale a y^{-2}.

Riferimenti bibliografici

[1] A. H. Beiler, *Recreations in the Theory of Numbers*, Dover, New York, 1966. Per qualche notizia in piú sulla storia dell'equazione di Pell si veda il Cap. 22.

[2] J. H. Conway & R. K. Guy, *Il Libro dei Numeri*, Hoepli, Milano, 1999. Si vedano soprattutto il Cap. 4 per ϕ (che però è chiamato τ) e il Cap. 6 per le frazioni continue. La Figura 2(b) è adattata dalla Figura 7.3 del Capitolo 7, nel quale si possono trovare numerosi altri esempi di costruzioni geometriche utilizzabili per dimostrare l'irrazionalità di numeri che emergono molto naturalmente come rapporti fra le misure di segmenti nelle figure piane regolari e la discussione generale delle ricorrenze come le (4). Si veda anche la p. 159 per un'ulteriore dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{N}$ quando N non è un quadrato perfetto.

[3] H. M. Edwards, *Fermat's Last Theorem*, Springer, Berlino, 1977. Nel §1.9 potete trovare la storia del problema dall'antichità (India, VII sec.) a Fermat (XVII sec.). Inoltre c'è una dettagliata spiegazione del "metodo ciclico" inventato dai matematici indiani per ottenere la piú piccola soluzione dell'equazione (13) con $k = 1$.

[4] G. H. Hardy *Apologia di un Matematico*, Garzanti, Milano, 1989. La frase citata è nel §12.

[5] G. H. Hardy & E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5ª ed., Oxford U. P., Oxford, 1979. Il Teorema di Pitagora su $\sqrt{2}$ è il Teorema 43, la sua generalizzazione citata sopra è il Teorema 45. Per le frazioni continue si veda il Cap. 10, e per altre questioni di approssimazione diofantea il Cap. 11. L'equazione (2) è completamente risolta nel §14.5.

[6] E. Landau, *Elementary Number Theory*, 2ª ed., Chelsea, New York, 1966. La discussione completa dell'equazione di Pell si trova nel Cap. 7 della prima parte.

[7] C. D. Olds, *Frazioni Continue*, Zanichelli, Bologna, 1970. Si vedano i §§4.8-4.9 per il problema proposto da Archimede e per la relazione fra l'equazione (13) con $k = 1$ e le frazioni continue.

[8] L. Pacioli, *De Divina Proportione*, 1509.

[9] L. Russo, *La Rivoluzione Dimenticata*, Feltrinelli, Milano, 1997. L'osservazione citata si trova a pag. 54; la matematica greca è discussa principalmente nel Cap. 2.

[10] D. Shanks, *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*, 3ª ed., Chelsea, New York, 1985. Si vedano i §§58–61 per l'equazione di Pell in generale, ed i §§41–45 per una discussione molto originale e interessante della filosofia pitagorica e del suo impatto sulla scienza moderna.

[11] A. Weil, *Teoria dei Numeri*, Einaudi, Torino, 1993. Nel Cap. 1, §VIII si trova una discussione dei contributi dei Greci, ed in particolare di Archimede, alla soluzione dell'equazione (13) per vari valori di N e k. Nei Capp. 2, §XIII e 3, §§XII-XIII rispettivamente, c'è il resoconto dei risultati di Fermat ed Eulero.

[12] D. Wells, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*, Penguin, Londra, 1987. Si vedano le voci "1.4142..." e "4729494" rispettivamente per l'equazione (2) e per il problema proposto da Archimede. Si vedano inoltre le voci "1.61803..." e "5" per la successione di Fibonacci. Purtroppo, a parte contenere qualche curiosità numerica, non sono riportate dimostrazioni, neppure delle proposizioni piú semplici.

[13] H. C. Williams, *Solving the Pell Equation*, pp. 397–435 in "Number Theory for the Millennium," Vol. 3, Bennett, Berndt, Boston, Diamond, Hildebrand & Philipp (eds.), A. K. Peters, 2002. Una breve storia dell'equazione di Pell, con gli sviluppi piú recenti.