

Università degli Studi di Parma
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Introduzione
alla Teoria Analitica dei Numeri

Alessandro Zaccagnini

Anno Accademico 2005–2006

Il testo è stato composto per mezzo di un pacchetto di macro creato dall'Autore e basato su L^AT_EX 2_ε, © American Mathematical Society. Le figure sono state create con MetaPost. L'ultima versione di questo testo è disponibile all'indirizzo <http://www.math.unipr.it/~zaccagni/psfiles/lezioni/dott2006.pdf>
La data di questa versione è 26 giugno 2007.

Questa versione su Internet è a disposizione di chiunque, gratuitamente, per un qualsiasi valido scopo di istruzione, a patto che non se ne faccia commercio e che non venga modificata in alcun modo.

Si prega di inviare suggerimenti e critiche, e di segnalare eventuali errori di stampa all'indirizzo qui sotto.

Prof. Alessandro Zaccagnini
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Parma
Parco Area delle Scienze, 53/a – Campus Universitario
43100 Parma, ITALIA
Tel. 0521 906902 – Telefax 0521 906950
e-mail: alessandro.zaccagnini@unipr.it
pagina web: <http://www.math.unipr.it/~zaccagni/home.html>

Indice

1	Risultati preliminari	5
1.1	Formule di sommazione	5
1.2	Le funzioni Gamma e Beta	8
1.3	La formula di Wallis e la formula di Stirling	9
1.4	Lemmi	11
1.5	Il prodotto di Eulero	14
2	Distribuzione dei Numeri Primi	17
2.1	Risultati elementari	17
2.2	I Teoremi di Eulero e di Chebyshev	20
2.3	Le formule di Mertens	24
2.4	Problemi aperti	29
3	Introduzione alla Teoria Analitica dei Numeri	30
3.1	Il programma di Riemann	30
3.2	L'equazione funzionale della funzione zeta	31
3.3	Distribuzione degli zeri della funzione zeta	36
3.4	La regione libera da zeri	39
3.5	La formula esplicita: legame fra psi e zeta	44
3.6	Dimostrazione del Teorema dei Numeri Primi	46
3.7	La congettura di Riemann	48
3.8	Considerazioni finali	49
	3.8.1 Distribuzione degli zeri e termine d'errore	49
3.9	Problemi aperti	50
	Bibliografia	51

Piano delle lezioni

Risultati elementari

Le “formule di Mertens” e la loro rilevanza per la distribuzione dei numeri primi. La formula di sommazione parziale (4 h)

La funzione zeta di Riemann e le sue proprietà

La definizione come serie di Dirichlet, l’equazione funzionale ed il prolungamento analitico, la distribuzione degli zeri, il prodotto di Weierstrass. (7 h)

Il Teorema dei Numeri Primi

La “formula esplicita” e le sue conseguenze; rilevanza della Congettura di Riemann per la distribuzione dei numeri primi. (4 h)

Capitolo 1

Risultati preliminari

Qui raccogliamo alcuni risultati non direttamente legati alla distribuzione dei numeri primi, ma di evidente importanza per la teoria svolta nel testo. In particolare, ci occupiamo di “formule di sommazione” che permettono di trasformare somme in altre somme o integrali, ed alcune applicazioni.

1.1 Formule di sommazione

Teorema 1.1.1 (Formula di Abel) *Data una successione strettamente crescente di numeri reali e positivi $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ tali che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$, una successione di numeri complessi $(a_n)_{n \geq 1}$ ed una funzione qualsiasi $\phi: \mathbb{R}^{0+} \rightarrow \mathbb{C}$, sia*

$$A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_n \leq x} a_n.$$

Per $N \in \mathbb{N}^*$ si ha

$$\sum_{1 \leq n \leq N} a_n \phi(\lambda_n) = A(\lambda_N) \phi(\lambda_N) - \sum_{n=1}^{N-1} A(\lambda_n) (\phi(\lambda_{n+1}) - \phi(\lambda_n)).$$

Se inoltre $\phi \in C^1(\mathbb{R}^+)$ ed $x \geq \lambda_1$ allora

$$\sum_{\lambda_n \leq x} a_n \phi(\lambda_n) = A(x) \phi(x) - \int_{\lambda_1}^x A(t) \phi'(t) dt. \quad (1.1.1)$$

Dim. Poniamo formalmente $A(\lambda_0) := 0$ per comodità. Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n \phi(\lambda_n) &= \sum_{n=1}^N [A(\lambda_n) - A(\lambda_{n-1})] \phi(\lambda_n) \\ &= A(\lambda_N) \phi(\lambda_N) - \sum_{n=1}^{N-1} A(\lambda_n) (\phi(\lambda_{n+1}) - \phi(\lambda_n)). \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Dato $x > 0$, sia N il piú grande intero tale che $\lambda_N \leq x$. Se ϕ ha derivata continua, possiamo scrivere la somma a destra nella (1.1.2) come

$$\sum_{n=1}^{N-1} A(\lambda_n) \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \phi'(t) dt = \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} A(t) \phi'(t) dt = \int_{\lambda_1}^{\lambda_N} A(t) \phi'(t) dt,$$

poiché A è costante in ciascun intervallo $(\lambda_n, \lambda_{n+1})$; dato che A è costante anche in $[\lambda_N, x)$, il primo termine è

$$A(\lambda_N) \phi(\lambda_N) = A(x) \phi(x) - \int_{\lambda_N}^x A(t) \phi'(t) dt,$$

il che conclude la dimostrazione. \square

Quando nel testo parliamo della “formula di sommazione parziale” ci riferiamo quasi sempre al caso $\lambda_n = n$ della (1.1.1):

$$\sum_{n \leq x} a_n \phi(n) = A(x) \phi(x) - \int_1^x A(t) \phi'(t) dt. \quad (1.1.3)$$

Teorema 1.1.2 (Formula di Euler-McLaurin) *Sia $f: (x, y] \rightarrow \mathbb{C}$ una qualunque funzione derivabile. Si ha*

$$\sum_{x < n \leq y} f(n) = \int_x^y f(t) dt + \int_x^y \{t\} f'(t) dt - \{y\} f(y) + \{x\} f(x).$$

Possiamo pensare a questo risultato come ad uno sviluppo in “termine principale,” “termine secondario” e “termine di resto.” Possiamo anche vederlo come un’ approssimazione di un integrale mediante opportune somme di Riemann. Nelle applicazioni spesso si sviluppa $\{t\}$ in serie di Fourier e poi si integra termine a termine.

Dim. Si può facilmente dare una dimostrazione che sfrutta la precedente formula di sommazione parziale (1.1.3). Qui diamo una dimostrazione alternativa: se $t \notin \mathbb{Z}$ si ha $\{t\} = t - [t]$ dove $[t]$ è costante e quindi

$$\frac{d}{dt} (\{t\} f(t)) = \{t\} f'(t) + f(t). \quad (1.1.4)$$

Dunque

$$\int_{n-1}^n (\{t\} f'(t) + f(t)) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{n-1+\varepsilon}^{n-\varepsilon} (\{t\} f'(t) + f(t)) dt = f(n),$$

e si può usare di nuovo la (1.1.4) anche negli intervalli $[x, [x + 1]$, $[y], y]$. \square

Lemma 1.1.3 Sia $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione debolmente decrescente e infinitesima. Esiste una costante reale E tale che per $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \int_1^x f(t) dt + E + O(f(x)).$$

Dim. Poniamo $E_n := f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt$. Poiché f è decrescente si ha che $0 \leq E_n \leq f(n) - f(n+1)$. Per induzione si verifica immediatamente che

$$0 \leq \sum_{h \leq n \leq k} E_n \leq f(h) - f(k+1). \quad (1.1.5)$$

Dunque, la serie $E := \sum_{n \geq 1} E_n$ è convergente ed inoltre $E \leq f(1)$. Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} f(n) - \int_1^x f(t) dt &= \sum_{n \leq x} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right) + \int_x^{[x]+1} f(t) dt \\ &= \sum_{n \leq x} E_n + O(f(x)) \\ &= E + O\left(\sum_{n \geq [x]+1} E_n \right) + O(f(x)), \end{aligned}$$

e la tesi segue dalla (1.1.5) con $h = [x] + 1$. \square

Questo Lemma può essere un utile sostituto della formula di sommazione parziale quando questa non è applicabile perché f non è derivabile, oppure può essere più semplice da usare: per esempio una conseguenza immediata è

$$\sum_{2 \leq n \leq N} \frac{1}{\log n} = \text{li}(N) + C + O((\log N)^{-1}),$$

per un'opportuna costante positiva C . Tenendo presente il Teorema dei Numeri Primi 2.1.3, questa relazione viene talvolta espressa dicendo che la "probabilità" che un intero $n \geq 3$ sia primo è $(\log n)^{-1}$.

Esercizi.

- € 1. Dimostrare la formula di sommazione di Euler-McLaurin 1.1.2 per mezzo della formula di sommazione parziale 1.1.1. Suggerimento: sfruttare il fatto che $\sum_{x < n \leq t} 1 = [t] - [x] = t - x - \{t\} + \{x\}$, e poi integrare per parti la funzione $t f'(t)$.

Riferimenti. Formula di sommazione parziale 1.1.1: si veda la dimostrazione del Teorema 4.2 di Apostol [2]. Formula di Euler-McLaurin 1.1.2: Apostol [2], Teorema 3.1; sue generalizzazioni in Hardy [17], Cap. 13. Lemma 1.1.3: Chandrasekharan [6], Teorema 7, Cap. VI.

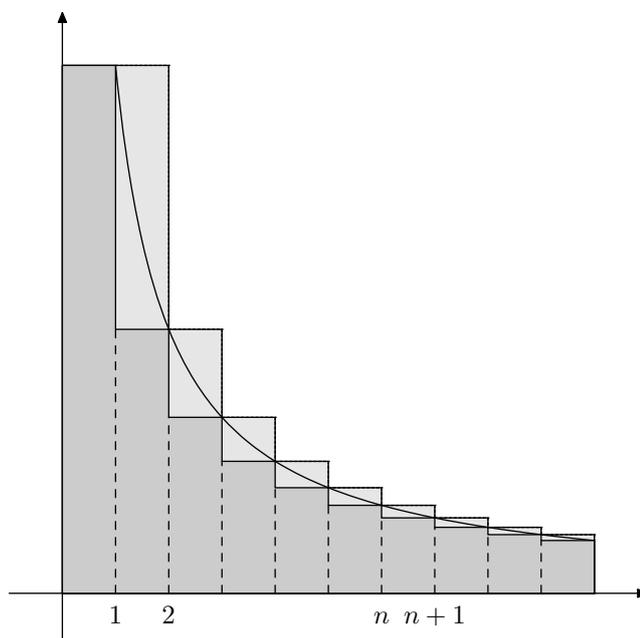


Figura 1.1: Dimostrazione del Lemma 1.1.3: l'area in grigio chiaro non supera $f(1)$. L'area in grigio scuro fra $x = 0$ ed $x = n$ è piú grande di $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.

1.2 Le funzioni Gamma e Beta

Definizione 1.2.1 (Funzione Gamma di Eulero) Per $z = x + iy \in \mathbb{C}$ con parte reale $x = \Re(z) > 0$ definiamo

$$\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

L'integrale è totalmente convergente in ogni compatto contenuto nel semipiano $\Re(z) > 0$.

Ricordiamo senza dimostrazione le principali proprietà della funzione Gamma di Eulero: Γ soddisfa l'equazione funzionale $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ed inoltre $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{1/2}$, e quindi $\Gamma(n+1) = n!$ per $n \in \mathbb{N}$. Inoltre Γ ha un prolungamento analitico a \mathbb{C} privato di $\mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N}^*)$, e in questo insieme vale la formula di Weierstrass

$$\frac{1}{z\Gamma(z)} = e^{\gamma z} \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \quad (1.2.1)$$

dove γ è la costante di Eulero definita dalla (1.4.1). Si osservi infine che vale la formula di Stirling generalizzata (cfr Appendice 1.3): per ogni $\delta > 0$ fissato si ha

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O_\delta(|z|^{-1}), \quad (1.2.2)$$

quando $|z| \rightarrow +\infty$ nell'angolo $|\arg(z)| \leq \pi - \delta$. Questa formula è un ingrediente essenziale della dimostrazione del Teorema 3.4.5.

Altre due proprietà importanti sono la “formula di duplicazione” ed una relazione funzionale che lega Γ con la funzione seno:

$$\Gamma(2s) = \pi^{-1/2} 2^{2s-1} \Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \quad (1.2.3)$$

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) \sin(\pi s) = \pi. \quad (1.2.4)$$

Sostituendo $s/2$ al posto di s nella (1.2.3), e $(s+1)/2$ al posto di s nella (1.2.4), e confrontando poi i due valori di $\Gamma((s+1)/2)$ così determinati, si trova la relazione

$$\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma((1-s)/2)} = \pi^{1/2} 2^{1-s} \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) \Gamma(s). \quad (1.2.5)$$

Definizione 1.2.2 (Funzione Beta) Per $\Re(z), \Re(w) > 0$ definiamo

$$B(z, w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt = \frac{\Gamma(z) \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Mediante un semplice cambiamento di variabili si ottiene

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2x-1} (\sin u)^{2y-1} du. \quad (1.2.6)$$

Riferimenti. Funzioni Gamma e Beta: Titchmarsh [39], §§1.86–1.87, Davenport [7], §10. Formula di Stirling in generale: Titchmarsh [39], §4.42.

1.3 La formula di Wallis e la formula di Stirling

Teorema 1.3.1 (Formula di Wallis per π) Si ha

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2N}{2N-1} \cdot \frac{2N}{2N+1} \right\} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{m=1}^N \frac{4m^2}{4m^2 - 1} = \frac{\pi}{2}.$$

Dim. Per $m \in \mathbb{N}$ definiamo $0!! := (-1)!! := 1$ e $(m+2)!! := m!!(m+2)$, osservando che $(2m)!! = 2^m(m!)$ e che $(2m-1)!! \cdot (2m)!! = (2m)!$. Consideriamo la successione $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ definita da

$$I_m \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\pi (\sin x)^m dx.$$

Si verifica immediatamente che I_m è una successione positiva e decrescente, che $I_0 = \pi$ e che $I_1 = 2$, ed integrando due volte per parti si ottiene la formula ricorrente

$$I_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} I_m. \quad (1.3.1)$$

Da questa, osservando che $I_{m+2} \leq I_{m+1} \leq I_m$ ricaviamo

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{I_m}{I_{m+1}} = 1. \quad (1.3.2)$$

Usando la formula ricorrente (1.3.1), si ottiene per induzione

$$\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = \frac{\pi}{2} (2m+1) \cdot \frac{(2m-1)!!^2}{(2m)!!^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2m)!^2 (2m+1)}{2^{4m} (m!)^4} = \binom{2m}{m}^2 \frac{(2m+1)\pi}{2^{4m+1}}, \quad (1.3.3)$$

che insieme alla (1.3.2) implica la tesi ed anche la relazione asintotica $\binom{2m}{m} \sim 2^{2m} / \sqrt{\pi m}$. \square

☞ 1 **Teorema 1.3.2 (Formula di Stirling)** Per $N \rightarrow +\infty$ ed $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\log N! = N \log N - N + \frac{1}{2} \log(2\pi N) + O(N^{-1}).$$

Dim. Per la formula di sommazione parziale (1.1.3) con $a_n = 1$ e $\phi(t) = \log t$, se $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned} \log N! &= \sum_{n=1}^N \log n = N \log N - \int_1^N \frac{[t]}{t} dt \\ &= N \log N - (N-1) + \int_1^N \frac{\{t\}}{t} dt. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Posto $g(t) := \frac{1}{2}(\{t\}^2 - \{t\})$, per il Lemma 1.4.5 si ha che g è continua, derivabile per $t \notin \mathbb{Z}$ e che $g'(t) = \{t\} - \frac{1}{2}$. Quindi, integrando per parti,

$$\int_1^N \frac{\{t\}}{t} dt = \left[\frac{g(t)}{t} + \frac{1}{2} \log t \right]_1^N + \int_1^N \frac{g(t)}{t^2} dt = \frac{1}{2} \log N + \frac{1}{2} \int_1^N \frac{\{t\}^2 - \{t\}}{t^2} dt.$$

L'ultimo integrale esteso a tutto l'intervallo $[1, +\infty)$ è chiaramente convergente, e si ha

$$\int_1^N \frac{\{t\}^2 - \{t\}}{t^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}^2 - \{t\}}{t^2} dt + O(N^{-1}).$$

Sostituendo in (1.3.4) otteniamo immediatamente, per qualche $C \in \mathbb{R}$,

$$\log N! = N \log N - N + \frac{1}{2} \log N + C + O(N^{-1}). \quad (1.3.5)$$

Per dimostrare che $C = \frac{1}{2} \log(2\pi)$ è sufficiente combinare le (1.3.2), (1.3.3) e (1.3.5). \square

Si osservi che per la (1.2.6) $I_m = B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(m+1))$ e quindi non è sorprendente che I_m sia legata alla funzione $m!$. Inoltre, integrando per parti ed utilizzando opportuni sviluppi in serie di Fourier, è possibile dare uno sviluppo asintotico per la funzione $\log N! - (N \log N - N + \frac{1}{2} \log(2\pi N))$. In particolare si può dimostrare che

$$\log N! = N \log N - N + \frac{1}{2} \log(2\pi N) + \frac{1}{12N} + O(N^{-2}),$$

cioè che

$$N! = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \left(1 + \frac{1}{12N} + O(N^{-2})\right).$$

Esercizi.

- ☞ 1. Usare la formula di Euler-McLaurin 1.1.2 per ridimostrare la formula di Stirling 1.3.2.

Riferimenti. Formula di Stirling 1.3.2: per una dimostrazione simile, ma con una conclusione leggermente più debole, si veda Apostol [2], Teorema 3.15, oppure Titchmarsh [39], §1.87. Una dimostrazione della formula di Stirling completamente diversa si trova in Marsaglia & Marsaglia [27].

1.4 Lemmi

- ☞ 1 **Teorema 1.4.1** Per ogni $k \in \mathbb{R}$ fissato si ha, quando $x \rightarrow +\infty$ ed $x \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n \leq x} n^k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} x^{k+1} + \frac{1}{2} x^k + O_k(x^{k-1}) & \text{se } k > 0, \\ x & \text{se } k = 0, \\ \frac{1}{k+1} x^{k+1} + c_k + O_k(x^k) & \text{se } k \in (-1, 0), \\ \log x + c_{-1} + O(x^{-1}) & \text{se } k = -1, \\ \zeta(-k) + O_k(x^{k+1}) & \text{se } k < -1, \end{cases}$$

dove ζ è la funzione zeta di Riemann e c_k indica un'opportuna costante che dipende solo da k . In particolare c_{-1} si indica di solito con γ , vale approssimativamente $0.577215\dots$ e si chiama costante di Eulero–Mascheroni.

Dim. Usando la formula di sommazione parziale troviamo per $k > -1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^x n^k &= x^{k+1} - k \int_1^x [t] t^{k-1} dt = \frac{x^{k+1} + k}{k+1} + k \int_1^x \{t\} t^{k-1} dt \\ &= \frac{x^{k+1} + k}{k+1} + \frac{k}{2} \int_1^x t^{k-1} dt + k \int_1^x \left(\{t\} - \frac{1}{2} \right) t^{k-1} dt \\ &= \frac{x^{k+1} + k}{k+1} + \frac{x^k - 1}{2} + k [g(t) t^{k-1}]_1^x - k(k-1) \int_1^x g(t) t^{k-2} dt \end{aligned}$$

dove $g(t) := \frac{1}{2}(\{t\}^2 - \{t\})$ è una primitiva di $\{t\} - \frac{1}{2}$. Se $k \geq 0$ il risultato segue immediatamente, poiché g è una funzione limitata. Per $k \in (-1, 0)$ l'ultimo integrale può essere esteso ad $[1, +\infty)$ e vale $c'_k + O(x^{k-1})$.

Per la penultima relazione la formula di sommazione parziale dà immediatamente

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= 1 + \int_1^x \frac{[t]}{t^2} dt = 1 + \log x - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2} dt \\ &= \log x + 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt + O\left(\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}\right), \end{aligned}$$

e dunque il risultato segue, con

$$c_{-1} = \gamma \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt. \quad (1.4.1)$$

Per l'ultima relazione basta osservare che per $k < -1$

$$\sum_{n \leq x} n^k = \sum_{n \geq 1} n^k + O\left(\int_x^{+\infty} t^k dt\right) = \zeta(-k) + O_k(x^{k+1}).$$

Si noti che nel caso $k = -1$ il termine d'errore ottenuto è particolarmente soddisfacente in quanto "ottimale": dato che l'ultimo addendo nella somma è $[x]^{-1} \sim x^{-1}$, l'errore non può essere $o(x^{-1})$. \square

Definizione 1.4.2 (Numeri di Bernoulli) I numeri di Bernoulli B_n sono i coefficienti dello sviluppo

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{B_1}{2!}z^2 - \frac{B_2}{4!}z^4 + \frac{B_3}{6!}z^6 + \dots$$

valido per $|z| < 2\pi$. In particolare, $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$.

Teorema 1.4.3 *Posto* $\beta_0 := 1$, $\beta_1 := -\frac{1}{2}$, $\beta_{2k} := (-1)^{k-1}B_k$, $\beta_{2k+1} := 0$ per $k \in \mathbb{N}^*$, dove i B_k sono i numeri di Bernoulli, si ha

$$\sum_{m=1}^{n-1} m^k = \sum_{r=0}^k \frac{1}{k+1-r} \binom{k}{r} n^{k+1-r} \beta_r.$$

Dim. La dimostrazione si ottiene confrontando i coefficienti di x^{k+1} nelle espressioni

$$k!x(1 + e^x + \dots + e^{(n-1)x}) = k! \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \dots \right) \left(nx + \frac{n^2x^2}{2!} + \dots \right),$$

che sono uguali entrambe a $k!x(e^{nx} - 1)(e^x - 1)^{-1}$. \square

Lemma 1.4.4 *Per ogni* $k \in \mathbb{R}^{0+}$ *si ha*

$$\sum_{d \leq x} \left(\log \frac{x}{d} \right)^k \leq x\Gamma(k+1).$$

Dim. Per $d \in \mathbb{N}^*$ si ha

$$\left(\log \frac{x}{d} \right)^k \leq \int_{d-1}^d \left(\log \frac{x}{t} \right)^k dt,$$

mentre se $d = 1$ l'integrale è improprio nell'estremo sinistro, ma convergente. Dunque

$$\sum_{d=1}^{\lfloor x \rfloor} \left(\log \frac{x}{d} \right)^k \leq \int_0^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^k dt = x \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du = x\Gamma(k+1),$$

mediante il cambiamento di variabile $t = xe^{-u}$. \square

Per $k = 1$ questa relazione implica la formula di Stirling nella forma piú debole $\log N! = N \log N + O(N)$, che è comunque sufficiente per ottenere i risultati del Capitolo 2.

Lemma 1.4.5 *La funzione* $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *definita da* $g(t) = \frac{1}{2}(\{t\}^2 - \{t\})$ *è continua, derivabile su* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *e* $g'(t) = \{t\} - \frac{1}{2}$ *per* $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Dim. La funzione g ha periodo 1; per la continuità in 0 è sufficiente verificare che

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) = g(0) = 0.$$

Infine, per $n \in \mathbb{Z}$ e $t \in (n, n+1)$ si ha $\{t\} = t - n$ e quindi $g(t) = \frac{1}{2}(t^2 - (2n+1)t + n^2 + n)$ da cui $g'(t) = \{t\} - \frac{1}{2}$. \square

Si noti che la funzione $\{t\} - \frac{1}{2}$ ha media nulla sul suo periodo.

Esercizi.

⊗ 1. Ridimostrare il Teorema 1.4.1 per mezzo della formula di Euler-McLaurin 1.1.2.

Riferimenti. Teoremi 1.4.1 e 1.4.4: Apostol [2] Teorema 3.2; Hardy & Wright [19] Teoremi 422 (per il caso $k = -1$) e 423. Numeri di Bernoulli: Hardy & Wright [19] §7.9 o Apostol [2] §12.12.

1.5 Il prodotto di Eulero

Definizione 1.5.1 (Funzioni moltiplicative) Una funzione aritmetica f si dice moltiplicativa se $f(1) = 1$ e per ogni $n, m \in \mathbb{N}^*$ con $(n, m) = 1$ si ha $f(nm) = f(n)f(m)$. Se questo vale per ogni $n, m \in \mathbb{N}^*$, f si dice completamente moltiplicativa. Indicheremo con \mathfrak{M} ed \mathfrak{M}^* rispettivamente l'insieme delle funzioni moltiplicative e quello delle funzioni completamente moltiplicative.

Definizione 1.5.2 Sia $n \in \mathbb{N}^*$, con la fattorizzazione canonica data da

$$n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i},$$

dove $p_i < p_j$ se $i < j$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ per $i = 1, \dots, k$, ed $i p_i$ sono numeri primi. Si dice funzione μ di Möbius la funzione aritmetica moltiplicativa μ definita da

$$\mu(n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } \alpha_i \geq 2 \text{ per qualche } i \in \{1, \dots, k\}, \\ (-1)^k & \text{se } \alpha_i = 1 \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, k\}. \end{cases}$$

Ricordiamo che, per definizione, il prodotto infinito

$$\prod_{n \geq 1} (1 + a_n) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n \leq N} (1 + a_n)$$

è convergente se il limite in questione esiste ed è un numero complesso diverso da 0, con la condizione supplementare che $a_n \neq -1$ per ogni $n \geq 1$. Per i prodotti finiti non c'è una convenzione analoga. Per questo motivo dobbiamo dare una versione del prossimo enunciato in un modo un po' bizzarro.

Teorema 1.5.3 (Prodotto di Eulero) Sia $f \in \mathfrak{M}$ una funzione aritmetica moltiplicativa tale che $\sum_{n \geq 1} f(n)$ sia assolutamente convergente. Per ogni primo p poniamo

$$F(p) \stackrel{\text{def}}{=} f(p) + f(p^2) + f(p^3) + \dots = \sum_{v \geq 1} f(p^v).$$

Se $F(p) \neq -1$ per ogni numero primo p , allora vale l'identità

$$\sum_{n \geq 1} f(n) = \prod_p (1 + F(p)), \quad (1.5.1)$$

dove il prodotto è esteso a tutti i primi ed è assolutamente convergente. Se esiste un numero primo p_0 tale che $F(p_0) = -1$ allora la somma a sinistra nella (1.5.1) vale 0. Infine, se $f \in \mathfrak{M}^*$ allora $F(p) \neq -1$ per ogni numero primo p e inoltre

$$\sum_{n \geq 1} f(n) = \prod_p (1 - f(p))^{-1}.$$

Dim. Si ha $f(1) = 1$ poiché f è moltiplicativa. Poniamo

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} f(n) \quad \text{e} \quad P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{p \leq x} (1 + F(p)). \quad (1.5.2)$$

Poiché P è prodotto di un numero finito di serie assolutamente convergenti, possiamo moltiplicarle fra loro e riordinare i termini. Posto $\mathcal{A}(x) := \{n \in \mathbb{N}^* : p \mid n \Rightarrow p \leq x\}$, si ha

$$P(x) = \sum_{n \in \mathcal{A}(x)} f(n) \quad \text{e quindi} \quad S - P(x) = \sum_{n \notin \mathcal{A}(x)} f(n).$$

Osserviamo che se $n \notin \mathcal{A}(x)$ allora $n > x$. Dunque

$$\left| S - P(x) \right| \leq \sum_{n \notin \mathcal{A}(x)} |f(n)| \leq \sum_{n > x} |f(n)| \rightarrow 0$$

quando $x \rightarrow +\infty$. La prima parte della tesi segue sia nel caso in cui $F(p) \neq -1$ per ogni p primo sia se, viceversa, esiste un numero primo p_0 per cui $F(p_0) = -1$, perché allora $P(x) = 0$ per $x \geq p_0$. Nel solo primo caso, il prodotto converge assolutamente poiché

$$\left| \sum_p F(p) \right| \leq \sum_p \sum_{n \geq 1} |f(p^n)| \leq \sum_{n \geq 1} |f(n)|.$$

Se poi $f \in \mathfrak{M}^*$, allora $f(p^n) = f(p)^n$ ed inoltre, per l'ultima disuguaglianza, $|f(p)| < 1$, altrimenti $|f(p)| + |f(p)|^2 + \dots$ divergerebbe. L'ultima affermazione segue immediatamente.

Diamo anche una dimostrazione alternativa della prima parte. Per la convergenza assoluta possiamo raggruppare tutti gli interi che sono divisibili per la stessa potenza di 2: sfruttando la moltiplicatività otteniamo

$$\sum_{n \geq 1} f(n) = \sum_{v \geq 0} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ 2^v \parallel n}} f(n) = \left(\sum_{v \geq 0} f(2^v) \right) \sum_{\substack{m \geq 1 \\ 2 \nmid m}} f(m),$$

dove scriviamo $p^\alpha \parallel n$ per indicare che p^α è la piú grande potenza di p che divide n , cioè che $p^\alpha \mid n$ ma $p^{\alpha+1} \nmid n$.

Analogamente, nell'ultima somma a destra raggruppiamo tutti gli interi che sono divisibili per la stessa potenza di 3:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} f(n) &= \left(1 + F(2)\right) \sum_{v \geq 0} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ 2 \nmid n, 3^v \parallel n}} f(n) \\ &= \left(1 + F(2)\right) \left(1 + F(3)\right) \sum_{\substack{m \geq 1 \\ (2 \cdot 3, m) = 1}} f(m). \end{aligned}$$

Iterando lo stesso ragionamento per i primi k numeri primi $p_1 = 2, \dots, p_k$, si ha

$$\sum_{n \geq 1} f(n) = \left(\prod_{j=1}^k (1 + F(p_j)) \right) \sum_{\substack{m \geq 1 \\ p \mid m \Rightarrow p > p_k}} f(m). \quad (1.5.3)$$

Notiamo che nel caso in cui esiste p_0 primo tale che $F(p_0) = -1$ la tesi segue immediatamente. Evidentemente

$$\left| \sum_{\substack{m \geq 1 \\ p \mid m \Rightarrow p > p_k}} f(m) - 1 \right| \leq \sum_{n > p_k} |f(n)| \quad (1.5.4)$$

da cui, sempre per la convergenza assoluta, si ha la tesi poiché

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{m \geq 1 \\ p \mid m \Rightarrow p > p_k}} f(m) = 1. \quad (1.5.5)$$

In generale, la (1.5.3) e la (1.5.5) mostrano che la serie dell'enunciato può annullarsi solo se si annulla uno dei fattori. Può essere interessante notare che le due dimostrazioni proposte privilegiano diversamente le strutture additiva e moltiplicativa dei numeri naturali: nella prima si dimostra che $S - P(x) = o(1)$, nella seconda che $S = P(x)(1 + o(1))$, dove $P(x)$ è definito nella (1.5.2). \square

Riferimenti. Prodotto di Eulero 1.5.3: Apostol [2], Teorema 11.6 oppure Ingham [23], §1.6. Definizione e proprietà dei prodotti infiniti: Titchmarsh [39], §1.4–1.44; per il prodotto di serie assolutamente convergenti, *ibidem*, §§1.6–1.65.

Capitolo 2

Distribuzione dei Numeri Primi

Questo Capitolo è dedicato principalmente alla dimostrazione di alcuni risultati “elementari” che riguardano la distribuzione dei numeri primi, che possono essere ottenuti con considerazioni esclusivamente “reali,” senza fare ricorso all’analisi complessa.

2.1 Risultati elementari

Definizione 2.1.1 (Funzioni di Chebyshev) Per $x \geq 1$ poniamo

$$\pi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p \leq x} 1 = |\{p \leq x\}|, \quad \theta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p \leq x} \log p, \quad \psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Vedremo subito nel §2.2 che la funzione $\pi(x)$ è dell’ordine di grandezza di $x/\log x$ (e quindi che l’ n -esimo numero primo p_n è dell’ordine di $n \log n$), mentre le funzioni θ e ψ differiscono fra loro di poco (Lemma 2.2.4). Il “peso” $\log p$ con cui contiamo i numeri primi in θ (ed il peso $\Lambda(n)$ con cui contiamo le potenze dei primi in ψ) bilancia esattamente la rarefazione dei primi, come dimostra il Teorema di Chebyshev 2.2.2. In definitiva, le tre funzioni $\pi(x) \log x$, $\theta(x)$ e $\psi(x)$ sono “equivalenti,” almeno in prima approssimazione. Nel Capitolo 3 spiegheremo perché la funzione ψ , anche se apparentemente “artificiale,” è in realtà la piú naturale delle tre: per il momento ci limitiamo ad osservare che $\psi(x)$ è il logaritmo del minimo comune multiplo di tutti gli interi fra 1 ed x .

€ 1

Osserviamo che non è difficile dimostrare direttamente che tutte queste funzioni divergono per $x \rightarrow +\infty$, ma vogliamo ottenere informazioni piú precise: il nostro obiettivo non è tanto quello di ottenere una formula esatta per π , θ o ψ , quanto una formula che ci permetta di approssimare ciascuna di queste funzioni con una funzione “semplice” piú un resto sufficientemente piccolo. Formule di varia natura sono state congetture da Legendre, Gauss, Riemann.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Figura 2.1: I numeri primi fino a 1000.

Definizione 2.1.2 Per $x \geq 2$ definiamo la funzione logaritmo integrale per mezzo della relazione

$$\operatorname{li}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^x \right\} \frac{dt}{\log t}. \quad (2.1.1)$$

Il risultato seguente, che si chiama Teorema dei Numeri Primi, è stato congetturato da Gauss alla fine del Settecento, ma è stato dimostrato solo un secolo piú tardi da Hadamard e de la Vallée Poussin che hanno lavorato indipendentemente su una traccia lasciata da Riemann nel 1859 [35].

Teorema 2.1.3 (Hadamard-de la Vallée Poussin) Esiste una costante $c > 0$ tale che per $x \rightarrow +\infty$ si ha

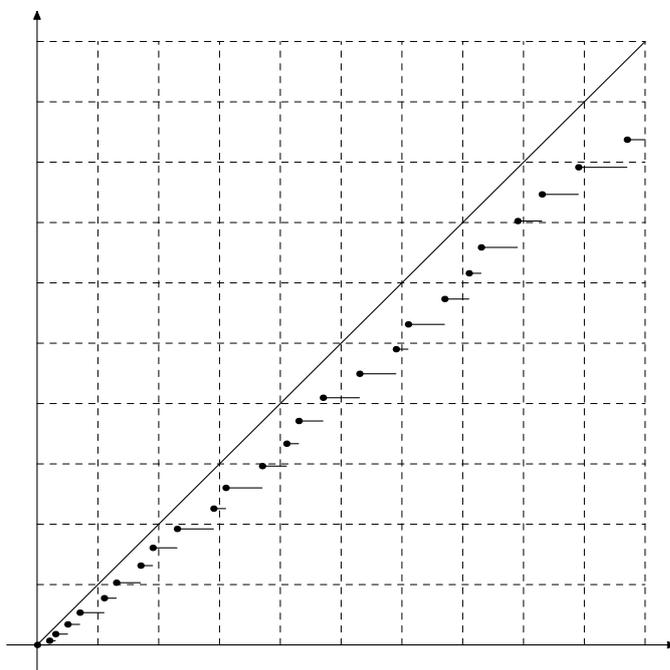
$$\pi(x) = \operatorname{li}(x) + O\left(x \exp\left\{-c(\log x)^{3/5}(\log \log x)^{-1/5}\right\}\right).$$

Daremo la dimostrazione di questo risultato nel Capitolo 3. Si osservi che implica la relazione piú semplice $\pi(x) \sim \operatorname{li}(x) \sim x/\log x$ quando $x \rightarrow +\infty$. Per poter confrontare questo risultato con il Teorema 2.1.3, osserviamo che mediante

5 \int integrazioni per parti ripetute è facile mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato si ha

$$\operatorname{li}(x) = \frac{x}{\log x} \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\log x)^k} + O_n\left(\frac{x}{(\log x)^{n+2}}\right). \quad (2.1.2)$$

Nelle applicazioni, però, è estremamente importante avere informazioni piú precise sulla quantità $\pi(x) - \operatorname{li}(x)$.


 Figura 2.2: Il grafico di $\theta(x)$ e di x per $x \in [0, 100]$.

Legendre fu il primo a fare congetture sulla distribuzione dei numeri primi, ed in particolare sull'andamento della funzione π : formulata in termini moderni, la sua congettura prende la forma

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x - A + o(1)}, \quad \text{dove} \quad A = 1.08366\dots$$

Questa congettura può essere scritta in un'altra forma equivalente, e cioè

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + (A + o(1)) \frac{x}{(\log x)^2}.$$

Se il termine con $k = 1$ nello sviluppo (2.1.2) è rilevante, allora A vale 1, e la congettura di Legendre è falsa. In realtà possiamo dimostrare la falsità della congettura di Legendre senza usare neppure il Teorema dei Numeri Primi: ce ne occuperemo alla fine del §2.3.

Gauss invece congetturò la validità del Teorema dei Numeri Primi con termine principale $\text{li}(x)$, ma senza dare indicazioni precise sul termine d'errore.

Il termine d'errore nel Teorema dei Numeri Primi probabilmente non è ottimale: in effetti si congettura che sia, sostanzialmente, dell'ordine di grandezza della radice quadrata del termine principale. Si tratta della Congettura di Riemann.

Congettura 2.1.4 (Riemann) Per $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$\pi(x) = \text{li}(x) + O(x^{1/2} \log x).$$

Nei prossimi paragrafi otterremo dei risultati approssimati sempre piú precisi: per la maggior parte sono conseguenze immediate del Teorema dei Numeri Primi, ma ne diamo una dimostrazione elementare indipendente.

Esercizi.

€ 1. Dimostrare che $\psi(x) = \log[1, 2, \dots, [x]]$.

€ 2. Dimostrare che se p è primo e $p^\alpha \parallel n!$, allora

$$\alpha = \sum_{r \geq 1} \left[\frac{n}{p^r} \right] \leq \frac{n}{p-1}.$$

€ 3. Con quante cifre 0 termina la rappresentazione decimale di $1000!$?

€ 4. Senza usare il Teorema dei Numeri Primi 2.1.3 dimostrare che dato $n \in \mathbb{N}$ è possibile trovare n interi consecutivi non primi.

€ 5. Dimostrare per induzione la formula (2.1.2).

2.2 I Teoremi di Eulero e di Chebyshev

Teorema 2.2.1 (Eulero) La serie e il prodotto seguenti sono divergenti:

$$\sum_p \frac{1}{p}, \quad \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Dim. Sia $f \in \mathfrak{M}^*$ con $f(p) := p^{-1}$ se $p \leq x$, $f(p) := 0$ se $p > x$. In sostanza poniamo $f(n) := n^{-1}$ se n non ha fattori primi $> x$, e poniamo $f(n) := 0$ in caso contrario. Poiché f è completamente moltiplicativa, per il Teorema 1.5.3 si ha

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \sum_{n \geq 1} f(n) = \sum_{n \in \mathcal{A}(x)} \frac{1}{n},$$

dove

$$\mathcal{A}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N}^* : p \mid n \Rightarrow p \leq x\}.$$

Quindi $n \in \mathcal{A}(x)$ per ogni $n \leq x$, e, per il Teorema 1.4.1 nel caso $k = -1$, si ha

$$P(x) \geq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O(x^{-1}).$$

Inoltre per $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ si ha $-\log(1-y) = y + O(y^2)$, e quindi

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} &= - \sum_{p \leq x} \log \left(1 - \frac{1}{p} \right) + O \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p^2} \right) \\ &= \log P(x) + O(1) \geq \log \log x + O(1), \end{aligned}$$

che implica la tesi in una forma quantitativa piuttosto forte. \square

Questa dimostrazione è importante perché lega un fatto analitico (la divergenza della serie armonica) ad una proprietà dei numeri primi. I Teoremi 2.3.4 e 2.3.6 mostrano che le minorazioni ottenute sono dell'ordine di grandezza corretto.

È importante notare che questo risultato di Eulero non solo dimostra che esistono infiniti numeri primi, ma dà anche delle indicazioni numeriche sulla loro densità: infatti notiamo che le serie dei reciproci delle potenze di 2, o la somma dei reciproci dei quadrati perfetti sono entrambe convergenti. Quindi, in un senso non molto preciso, possiamo dire che i numeri primi sono più numerosi dei quadrati perfetti. Notiamo anche che, per il criterio integrale per la convergenza delle serie (vedi Lemma 1.1.3) la minorazione ottenuta nel corso della dimostrazione suggerisce che $p_n \approx n \log n$: infatti

$$\sum_{\substack{n \geq 2 \\ n \log n \leq x}} \frac{1}{n \log n} \approx \sum_{n=2}^{x/\log x} \frac{1}{n \log n} \approx \log \log x.$$

Teorema 2.2.2 (Chebyshev) *Posto*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x}, & \lambda_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\theta(x)}{x}, & \lambda_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Psi(x)}{x}, \\ \Lambda_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x}, & \Lambda_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\theta(x)}{x}, & \Lambda_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Psi(x)}{x}, \end{aligned}$$

si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ e $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3$.

Dim. Si ha banalmente $\theta(x) \leq \Psi(x)$ ed inoltre per $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^m \leq x} \log p = \sum_{p \leq x} |\{m \in \mathbb{N}^* : p^m \leq x\}| \log p \\ &= \sum_{p \leq x} \left[\frac{\log x}{\log p} \right] \log p \leq \log x \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x) \log x. \end{aligned}$$

Questo dimostra che $\lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_1$ e che $\Lambda_2 \leq \Lambda_3 \leq \Lambda_1$. Inoltre si ha

$$\theta(x) \geq \sum_{y < p \leq x} \log p \geq \log y (\pi(x) - \pi(y)) \quad (2.2.1)$$

per ogni $y \in (1, x]$, da cui ricaviamo

$$\pi(x) \leq \frac{\theta(x)}{\log y} + \pi(y)$$

e quindi, ricordando che $\pi(y) \leq y$,

$$\frac{\pi(x) \log x}{x} \leq \frac{\theta(x) \log x}{x \log y} + \frac{\pi(y) \log x}{x} \leq \frac{\theta(x) \log x}{x \log y} + \frac{y \log x}{x}. \quad (2.2.2)$$

Le disuguaglianze $\lambda_1 \leq \lambda_2$ e $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ seguono scegliendo $y = x(\log x)^{-2}$. \square

È necessario prendere y abbastanza grande da rendere significativa la minoration (2.2.1), ma non troppo grande perché non domini il termine all'estrema destra nella (2.2.2). Le condizioni sono $(\log y)/\log x \rightarrow 1$ ed $y = o(x/\log x)$ quando $x \rightarrow +\infty$. In alternativa, scelto $y = x^\alpha$ con $\alpha < 1$, si ricava $\alpha\lambda_1 \leq \lambda_2$ per ogni $\alpha < 1$, e quindi $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

Chiameremo λ^* e Λ^* rispettivamente i valori comuni di questi limiti. Chebyshev fu il primo a dare disuguaglianze esplicite per λ^* e Λ^* , e dimostrò che se esiste il $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi(x) \log x)/x$ allora valgono entrambi 1: si veda il Corollario 2.3.5.

Teorema 2.2.3 (Chebyshev) *Si ha $\log 2 \leq \lambda^* \leq \Lambda^* \leq 2 \log 2$.*

Dim. Consideriamo la successione

$$I_m \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 x^m (1-x)^m dx.$$

È chiaro che $0 < I_m \leq 4^{-m}$, poiché la funzione integranda è positiva in $(0, 1)$ ed ha un massimo in $x = \frac{1}{2}$. Inoltre, poiché la funzione integranda è un polinomio a coefficienti interi, $I_m \in \mathbb{Q}^+$, e i denominatori che compaiono nello sviluppo esplicito dell'integrale sono tutti $\leq 2m + 1$. Dunque $I_m \exp \psi(2m + 1) \in \mathbb{N}^*$, e quindi $I_m \exp \psi(2m + 1) \geq 1$. Da quest'ultima relazione ricaviamo

$$\psi(2m + 1) \geq \log I_m^{-1} \geq 2m \log 2$$

da cui

$$\psi(2m + 1) \geq (2m + 1) \log 2 - \log 2.$$

Inoltre

$$\frac{\psi(2m + 2)}{2m + 2} \geq \frac{\psi(2m + 1)}{2m + 1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2m + 2}\right)$$

e la prima disuguaglianza segue immediatamente passando al minimo limite.

Per dimostrare la seconda disuguaglianza, consideriamo il coefficiente binomiale $M = \binom{2N+1}{N}$. Poiché M compare due volte nello sviluppo di $(1+1)^{2N+1}$, si ha $2M < 2^{2N+1}$ da cui $M < 2^{2N}$. Osserviamo che se $p \in (N+1, 2N+1]$ allora $p \mid M$, poiché divide il numeratore del coefficiente binomiale, ma non il denominatore. Questo ci permette di concludere che

$$\theta(2N+1) - \theta(N+1) \leq \log M < 2N \log 2. \quad (2.2.3)$$

Supponiamo di aver dimostrato che $\theta(n) < 2n \log 2$ per $1 \leq n \leq n_0 - 1$, osservando che questa relazione è banale per $n = 1, 2$. Se n_0 è pari allora $\theta(n_0) = \theta(n_0 - 1) < 2(n_0 - 1) \log 2 < 2n_0 \log 2$. Se n_0 è dispari, $n_0 = 2N + 1$ e quindi

$$\begin{aligned} \theta(n_0) &= \theta(2N+1) = \theta(2N+1) - \theta(N+1) + \theta(N+1) \\ &< 2N \log 2 + 2(N+1) \log 2 = 2n_0 \log 2, \end{aligned}$$

per la (2.2.3) e per l'ipotesi induttiva, ed il Teorema segue. \square

€ 1 Integrando $|k|$ volte per parti, si dimostra facilmente che per $|k| \leq m$ si ha

$$I_m = \frac{m!^2}{(m+k)!(m-k)!} \int_0^1 x^{m+k} (1-x)^{m-k} dx. \quad (2.2.4)$$

Prendendo $k = m$ si ha $I_m = m!^2 (2m+1)!^{-1}$, e dunque in effetti anche la dimostrazione della prima disuguaglianza dipende da considerazioni relative ad opportuni coefficienti binomiali. Inoltre, ripetendo la dimostrazione con il polinomio $p(x) := x^4(1-2x)^2(1-x)^4$ si ottiene la limitazione $\lambda^* \geq \frac{1}{2} \log 5$, ed è possibile ottenere limitazioni ancora più precise con altri polinomi, ma non $\lambda^* \geq 1$. Osserviamo che la formula di Stirling (1.3.2) dà la relazione $I_m^{-1} = 2^{2m+1} m^{1/2} \pi^{-1/2} (1 + O(m^{-1}))$, ma questa non dà informazioni più precise. Infine, $I_m = B(m+1, m+1)$ dove B è la funzione Beta definita nell'Appendice 1.2, e la (2.2.4) segue immediatamente dalle proprietà indicate nell'Appendice.

Lemma 2.2.4 Per $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$\psi(x) - \theta(x) = O(x^{1/2}).$$

Dim. Per il Teorema 2.2.3 si ha $\theta(x) = O(x)$, e dalla definizione è chiaro che

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(x^{1/2}) + \theta(x^{1/3}) + \dots$$

Osserviamo che se $m > m_0 := \lceil (\log x) / \log 2 \rceil$ allora $x^{1/m} < x^{(\log 2) / \log x} = 2$ e che $\theta(x) = 0$ per $x < 2$. Quindi possiamo scrivere la differenza $\psi(x) - \theta(x)$ nella forma

$$\theta(x^{1/2}) + \sum_{m=3}^{m_0} \theta(x^{1/m}) = O(x^{1/2}) + O(m_0 x^{1/3} \log x),$$

e la tesi segue osservando che $m_0 = O(\log x) = O(x^{1/6}/\log x)$. \square

Si noti che il Teorema 2.2.3 implica che $\theta(x) \geq x(\log 2 + o(1))$, e quindi la stima del Lemma 2.2.4 è evidentemente ottimale, a parte per il valore della costante implicita nella notazione $O(\cdot)$. Questo risultato, inoltre, fornisce una dimostrazione alternativa delle uguaglianze $\lambda_2 = \lambda_3$ e $\Lambda_2 = \Lambda_3$, nella notazione del Teorema di Chebyshev 2.2.2.

Corollario 2.2.5 *Si ha $\pi(x) = O(x/\log x)$.*

Questo significa che “quasi tutti” gli interi sono composti, il che è ragionevole perché gli interi grandi hanno una probabilità bassa di essere primi.

Esercizi.

- ⊗ 1. Dimostrare per induzione la formula (2.2.4).
- ⊗ 2. Dimostrare che $\psi(x) \geq \frac{1}{2}x \log 5 + O(1)$ utilizzando il polinomio $f(x) = x^4(1-2x)^2(1-x)^4$ nella dimostrazione del Teorema 2.2.3.
- ⊗ 3. * (Postulato di Bertrand) Dimostrare che $\pi(2x) - \pi(x) > 0$ per ogni $x \geq 2$.

Riferimenti. Teorema di Eulero 2.2.1: Ingham [23], §1.2. Storia del Teorema dei Numeri Primi 2.1.3: Goldstein [14] dà anche una breve descrizione della dimostrazione analitica. Si vedano anche Bateman & Diamond [3], Granville [16], [15]. Congettura di Legendre: Pintz [33]. Per l'andamento numerico delle funzioni π , θ e ψ e la bontà delle varie approssimazioni: Rosser & Schoenfeld [36] e Deléglise & Rivat [8], [9]. La minorazione nel Lemma di Chebyshev 2.2.3 è tratta da Nair [31], [30]. Per ulteriori considerazioni al riguardo, si veda Montgomery [28] Cap. 10. La maggiorazione nello stesso Lemma è quella del Teorema 415 di Hardy & Wright [19]. Si veda anche Ingham [23] §§1.4–1.5.

2.3 Le formule di Mertens

Teorema 2.3.1 (Prima formula di Mertens) *Per $N \rightarrow +\infty$ si ha*

$$\sum_{n \leq N} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log N + O(1). \quad (2.3.1)$$

Dim. Per la formula di Stirling 1.3.2 abbiamo $\log N! = N \log N + O(N)$. Scrivendo la fattorizzazione canonica di $N!$ ed utilizzando l'Esercizio 2.1.2, si trova

$$\begin{aligned} \log N! &= \sum_{p^k \leq N} \left[\frac{N}{p^k} \right] \log p = \sum_{n \leq N} \left[\frac{N}{n} \right] \Lambda(n) = \sum_{n \leq N} \frac{N \Lambda(n)}{n} + O(\psi(N)) \\ &= \sum_{n \leq N} \frac{N \Lambda(n)}{n} + O(N), \end{aligned}$$

per il Teorema 2.2.3; la tesi segue confrontando le due espressioni per $\log N!$. \square

Teorema 2.3.2 (Seconda formula di Mertens) Per $N \rightarrow +\infty$ si ha

$$\sum_{p \leq N} \frac{\log p}{p} = \log N + O(1). \quad (2.3.2)$$

Dim. È una conseguenza immediata della prima formula di Mertens (2.3.1). Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq N} \frac{\Lambda(n)}{n} - \sum_{p \leq N} \frac{\log p}{p} &\leq \sum_{p \leq N} \left(\frac{\log p}{p^2} + \frac{\log p}{p^3} + \dots \right) \\ &= \sum_{p \leq N} \frac{\log p}{p(p-1)} \leq \sum_{n \geq 2} \frac{\log n}{n(n-1)} \end{aligned}$$

e l'ultima serie è convergente. \square

Teorema 2.3.3 (Terza formula di Mertens) Per $N \rightarrow +\infty$ si ha

$$\int_1^N \frac{\psi(t)}{t^2} dt = \log N + O(1). \quad (2.3.3)$$

Dim. Per la formula di sommazione parziale (1.1.3) con $a_n = \Lambda(n)$ e $\phi(t) = t^{-1}$, si ha

$$\sum_{n \leq N} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{\psi(N)}{N} + \int_1^N \frac{\psi(t)}{t^2} dt,$$

e il risultato voluto segue dal Teorema 2.2.3 e dalla formula (2.3.2). \square

Teorema 2.3.4 (Formula di Mertens per i primi) Esiste una costante $B \in \mathbb{R}$ tale che per $N \rightarrow +\infty$ si ha

$$\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} = \log \log N + B + O((\log N)^{-1}). \quad (2.3.4)$$

Dim. Poniamo $R(N) := \sum_{p \leq N} p^{-1} \log p - \log N$. Per la seconda formula di Mertens (2.3.2) si ha $R(N) = O(1)$. Quindi, per la formula di sommazione parziale

(1.1.3) con $a_n = (\log n)/n$ se n è primo, e 0 altrimenti, $\phi(t) = (\log t)^{-1}$, otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq N} \frac{1}{p} &= \frac{1}{\log N} \sum_{p \leq N} \frac{\log p}{p} + \int_2^N \sum_{p \leq t} \frac{\log p}{p} \frac{dt}{t(\log t)^2} \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{\log N}\right) + \int_2^N \frac{\log t + R(t)}{t(\log t)^2} dt \\ &= 1 + O((\log N)^{-1}) + \log \log N - \log \log 2 \\ &\quad + \int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\log t)^2} dt + O\left(\int_N^{+\infty} \frac{dt}{t(\log t)^2}\right) \\ &= \log \log N + 1 - \log \log 2 + \int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\log t)^2} dt + O((\log N)^{-1}), \end{aligned}$$

dove gli integrali impropri convergono poiché $R(N) = O(1)$. \square

Corollario 2.3.5 (Chebyshev) *Se esiste il*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x},$$

allora vale 1. In altre parole, nella notazione del Teorema 2.2.3, si ha $\lambda^ \leq 1 \leq \Lambda^*$.*

Dim. Sia L il limite nell'enunciato. Per la formula di sommazione parziale (1.1.3) con $a_n = 1$ se n è primo, e 0 altrimenti, $\phi(t) = t^{-1}$, si ha

$$\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} = \frac{\pi(N)}{N} + \int_2^N \frac{\pi(t)}{t^2} dt = o(1) + (1 + o(1)) \int_2^N \frac{L dt}{t \log t} = (L + o(1)) \log \log N,$$

e la tesi segue dal Teorema 2.3.4. \square

Teorema 2.3.6 (Mertens) *Per $N \rightarrow +\infty$ si ha*

$$\prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log N} + O\left(\frac{1}{(\log N)^2}\right), \quad (2.3.5)$$

dove γ è la costante di Eulero definita dalla (1.4.1).

Dim. Non è difficile mostrare questo risultato con una costante positiva (non esplicita) k al posto di $e^{-\gamma}$. Infatti, dal Teorema 2.3.4 si ha

$$\begin{aligned} \log \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p}\right) &= - \sum_{p \leq N} \sum_{m \geq 1} \frac{1}{mp^m} \\ &= - \sum_{p \leq N} \frac{1}{p} - \sum_p \sum_{m \geq 2} \frac{1}{mp^m} + O\left(\sum_{p > N} \sum_{m \geq 2} \frac{1}{mp^m}\right) \\ &= - \log \log N + C + O((\log N)^{-1}). \end{aligned}$$

Per ottenere il risultato completo è necessario conoscere le proprietà delle funzioni zeta di Riemann e Gamma di Eulero: si vedano i riferimenti bibliografici. \square

Usando la terza formula di Mertens (2.3.3), è relativamente semplice dimostrare che la congettura di Legendre non può essere corretta.

Teorema 2.3.7 *Se esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\pi(x) = A \frac{x}{\log x} + (B + o(1)) \frac{x}{(\log x)^2} \quad (2.3.6)$$

per $x \rightarrow +\infty$, allora vale la relazione

$$\psi(x), \theta(x) = Cx + (D + o(1)) \frac{x}{\log x} \quad (2.3.7)$$

con $C = A$ e $D = B - A$. Viceversa, se esistono $C, D \in \mathbb{R}$ tali che valga la (2.3.7) per $x \rightarrow +\infty$, allora la (2.3.6) vale con $A = C$ e $B = C + D$. Infine, se vale una qualsiasi fra (2.3.6) e (2.3.7), allora $A = B = C = 1$ e $D = 0$.

Dim. È chiaro che le due relazioni nella (2.3.7) sono equivalenti a causa del Lemma 2.2.4. Se vale la (2.3.6) allora, per la formula di sommazione parziale (1.1.3) con $a_n = 1$ se n è primo, 0 altrimenti, $\phi(t) = \log t$,

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \sum_{p \leq x} \log p = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \\ &= Ax + (B + o(1)) \frac{x}{\log x} - \int_2^x \left(\frac{A}{\log t} + \frac{B + o(1)}{(\log t)^2} \right) dt \\ &= Ax + (B - A + o(1)) \frac{x}{\log x}. \end{aligned}$$

Viceversa, se vale la (2.3.7) allora, ancora per sommazione parziale con $a_n = 1$ se n è primo, 0 altrimenti, $\phi(t) = 1/\log t$,

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{p \leq x} 1 = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2} dt \\ &= C \frac{x}{\log x} + (D + o(1)) \frac{x}{(\log x)^2} + \int_2^x \left(\frac{C}{(\log t)^2} + \frac{D + o(1)}{(\log t)^3} \right) dt \\ &= C \frac{x}{\log x} + (C + D + o(1)) \frac{x}{(\log x)^2}. \end{aligned}$$

Infine, se vale la (2.3.7) allora

$$\int_2^x \frac{\Psi(t)}{t^2} dt = \int_2^x \left(\frac{C}{t} + \frac{D + o(1)}{t \log t} \right) dt = C \log x + (D + o(1)) \log \log x,$$

ed il risultato voluto segue dal confronto fra l'espressione a sinistra e la terza formula di Mertens (2.3.3). \square

Le formule di Mertens (2.3.2) e (2.3.4) ed il Teorema di Mertens 2.3.6 danno informazioni sulla “densità” dei numeri primi nella successione dei numeri naturali. Può essere un buon esercizio sulle formule di sommazione del §1.1, dimostrare le formule analoghe in cui somme e prodotti sono estesi a tutti i numeri naturali. L'analogia della (2.3.4) è ovviamente il Teorema 1.4.1 con $k = -1$, mentre le altre

€ 1 due diventano rispettivamente

$$\sum_{n \leq x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2}(\log x)^2 + O(\log x), \quad (2.3.8)$$

$$\prod_{2 \leq n \leq x} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{[x]} = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad (2.3.9)$$

Inoltre è importante notare che il Teorema dei Numeri Primi nella forma

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + O\left(\frac{x}{(\log x)^3}\right), \quad (2.3.10)$$

(cfr la (2.3.6) con $A = B = 1$) permette di migliorare alcune delle formule di Mertens: infatti, come nel Teorema 2.3.7, da questa deduciamo

$$\theta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt = x + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right), \quad (2.3.11)$$

e poi, per sommazione parziale (1.1.3) con $a_n = \log n$ se n è primo, 0 altrimenti, $\phi(t) = t^{-1}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} &= \frac{\theta(x)}{x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t^2} dt \\ &= 1 + O((\log x)^{-2}) + \int_2^x \frac{dt}{t} + \int_2^x \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt \\ &= \log x + c + o(1), \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

per un'opportuna costante c , poiché l'ultimo integrale può essere esteso a tutta la semiretta $[2, +\infty)$ e risulta convergente. Si osservi infine che, sempre per sommazione parziale, è possibile dedurre la (2.3.10) dalla (2.3.11).

Esercizi.

€ 1. Dimostrare le formule (2.3.8)–(2.3.9).

Riferimenti. Teoremi di Mertens (2.3.1)–(2.3.4): Hardy & Wright [19] Teoremi 424, 425, (22.6.1) e Teorema 427, oppure Ingham [23], §1.9. Teorema di Chebyshev 2.3.5: vedi Ingham [23], §1.8 per una dimostrazione alternativa. Teorema 2.3.6: si veda Hardy & Wright [19] Teorema 429, Ingham [23], §1.9. Pintz [33]. Diamond [10] elenca le “equivalenze” elementari delle relazioni fra le funzioni di Chebyshev.

2.4 Problemi aperti

La domanda piú importante naturalmente riguarda il vero ordine di grandezza di $\pi(x) - \text{li}(x)$. Littlewood [25] ha dimostrato che

$$\pi(x) - \text{li}(x) = \Omega(x^{1/2} \log_3 x (\log x)^{-1}),$$

mentre secondo la Congettura di Riemann 2.1.4 si dovrebbe avere $\pi(x) = \text{li}(x) + O(x^{1/2} \log x)$, o, equivalentemente, $\psi(x) = x + O(x^{1/2} (\log x)^2)$. Sorprendentemente, la Congettura di Riemann 2.1.4 può essere espressa in modo assolutamente elementare come segue: sia

$$H_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

il cosiddetto n -esimo numero armonico. Allora, per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\sigma(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d|n} d \leq H_n + \exp(H_n) \log(H_n) \tag{2.4.1}$$

se e solo se è vera la Congettura di Riemann. Informalmente, se la Congettura di Riemann fosse falsa, esisterebbe una successione divergente x_j tale che $\pi(x_j) > \text{li}(x_j) + x_j^{1/2+\delta}$, dove $\delta > 0$ è una quantità fissata. Usando i numeri primi in $[1, x_j]$ si potrebbe costruire in intero n_j con un valore $\sigma(n_j)$ piú grande della norma e tale da falsificare, seppur di poco, la (2.4.1). Per i dettagli si veda Lagarias [24].

Il Teorema dei Numeri Primi 2.1.3 suggerisce che

$$\pi(x) - \pi(x-y) \sim \int_{x-y}^x \frac{dt}{\log t}, \tag{2.4.2}$$

almeno quando y non è troppo piccolo rispetto ad x . Heath-Brown [20] ha dimostrato che questo è vero uniformemente per $x^{7/12-\varepsilon(x)} \leq y \leq x$, dove $\varepsilon(x)$ è una qualsiasi funzione positiva ed infinitesima. È altresí noto che questa relazione cessa di valere se $y = (\log x)^A$, per ogni $A > 0$ fissato (Maier [26]), ed anche per funzioni di x che crescono piú rapidamente: i migliori risultati noti (Hildebrand & Maier [22], Friedlander, Granville, Hildebrand & Maier [12]), sono complicati da enunciare. In ogni caso, per $x > 0$ ed $y > 1$ vale la maggiorazione universale detta disuguaglianza di Brun–Titchmarsh (Montgomery & Vaughan [29])

$$\pi(x+y) - \pi(x) \leq \frac{2y}{\log y}.$$

Capitolo 3

Introduzione alla Teoria Analitica dei Numeri

La Teoria Analitica dei Numeri nasce con la dimostrazione di Eulero del fatto che esistono infiniti numeri primi, che abbiamo riprodotto nel Teorema 2.2.1. Qui daremo solo qualche breve cenno ai risultati principali, senza alcuna pretesa di completezza anche nelle dimostrazioni. Assumeremo qualche conoscenza della teoria delle funzioni olomorfe: si veda anche il §1.2. Da qui in poi $s := \sigma + it$ è una variabile complessa con parte reale $\sigma = \Re(s)$ e parte immaginaria $t = \Im(s)$.

3.1 Il programma di Riemann

Riemann ha lasciato un solo, breve lavoro in Teoria dei Numeri [35]. In questo lavoro ha dimostrato alcune cose, fra le quali l'equazione funzionale per la funzione ζ che ne fornisce il prolungamento analitico a tutto il piano complesso privato del punto $s = 1$, e fatto molte congetture, che sono state tutte dimostrate, tranne una, nei successivi 40 anni circa.

Vediamo ora gli ingredienti fondamentali della dimostrazione classica del Teorema dei Numeri Primi. Possiamo riassumerne i punti fondamentali come segue:

1. Dimostrazione dell'identità fondamentale, valida per $\sigma = \Re(s) > 1$,

$$\zeta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

dove il prodotto è esteso a tutti e soli i numeri primi.

2. Equazione funzionale e prolungamento analitico della funzione ζ .

3. Espressione di ζ come *prodotto di Weierstrass* sugli zeri, e stima del numero degli zeri di ζ nella “striscia critica” $0 < \sigma < 1$.
4. Determinazione di una “regione libera da zeri.”
5. Espressione di $\psi(x)$ mediante un opportuno integrale complesso su un cammino illimitato contenuto nel semipiano $\sigma > 1$.
6. Deformazione del cammino di integrazione: connessione fra ψ e gli zeri della funzione ζ (la “formula esplicita”).

Queste sono le “tappe” che portano alla dimostrazione del Teorema dei Numeri Primi. Le parti piú complesse sono la dimostrazione dell’equazione funzionale, la formula esplicita e la determinazione della regione libera da zeri. Non daremo proprio tutti i dettagli, ma cercheremo di indicare almeno i punti fondamentali della dimostrazione di ciascuna parte del nostro programma.

3.2 L’equazione funzionale della funzione zeta

In questo paragrafo dimostreremo che la funzione ζ soddisfa un’equazione funzionale che permette di ricavare le sue caratteristiche nel semipiano $\sigma \leq \frac{1}{2}$ conoscendole nel semipiano $\sigma \geq \frac{1}{2}$. Dato che le caratteristiche piú importanti di ζ nel semipiano $\sigma > 1$ sono note, mediante la trasformazione $s \rightarrow 1 - s$ possiamo ricavare le proprietà di ζ in $\sigma < 0$: si veda la Figura 3.2. Resta fuori da questo discorso la striscia $0 \leq \sigma \leq 1$, che viene detta “striscia critica.” Vedremo oltre che per quello che riguarda la distribuzione dei numeri primi, ciò che conta è il numero e la posizione degli zeri della funzione ζ in questa regione.

Notiamo anche che la funzione zeta soddisfa la relazione $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$ (principio di riflessione) perché dalla definizione come serie di Dirichlet è chiaro che ζ è reale sull’asse reale. Questo comporta, in particolare, che eventuali zeri ρ non reali vengano a coppie ρ e $\bar{\rho}$.

Teorema 3.2.1 (Eulero-Riemann) *La serie ed il prodotto*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

convergono totalmente e quindi uniformemente in tutti i compatti contenuti nel semipiano $\{s \in \mathbb{C}: \Re(s) > 1\}$ e rappresentano la stessa funzione olomorfa, detta funzione ζ di Riemann. La funzione ζ ha un prolungamento meromorfo a $\sigma > 0$, e nel punto $s = 1$ ha un polo semplice con residuo 1.

Dim. Sia K un compatto contenuto nel semipiano $S := \{s \in \mathbb{C} : \sigma = \Re(s) > 1\}$: per la continuità dell'applicazione $s \mapsto \Re(s)$, esiste $s_0 \in K$ in cui questa assume valore minimo, ed evidentemente $\sigma_0 = \Re(s_0) > 1$. La convergenza totale della somma e del prodotto è una conseguenza immediata delle disuguaglianze

$$\left| \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n \geq 1} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\sigma}} = \zeta(\sigma) \leq \zeta(\sigma_0).$$

La rappresentazione come prodotto di Eulero segue immediatamente dal Teorema 1.5.3, poiché $N_{-s} \in \mathfrak{M}^*$. Preso poi un numero reale $x > 1$, per la formula di sommazione parziale (1.1.3), nel semipiano S si ha

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{[x]}{x^s} + s \int_1^x \frac{[t]}{t^{s+1}} dt = \frac{[x]}{x^s} + \frac{s}{s-1} (1 - x^{1-s}) - s \int_1^x \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt.$$

Dunque,

$$\zeta(s) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt. \quad (3.2.1)$$

Quest'ultima formula fornisce il prolungamento analitico di ζ al semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 0\}$, privato del punto $s = 1$, in quanto l'integrale è totalmente convergente in ogni compatto contenuto in $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 0\}$, ed è anche chiaro che ζ ha un polo semplice con residuo 1 in $s = 1$. \square

Inoltre, ricordando la definizione della costante di Eulero data nella (1.4.1), si verifica immediatamente che

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt = \gamma.$$

Teorema 3.2.2 *Nel semipiano $S := \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$ vale la rappresentazione*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right),$$

dove μ è la funzione di Möbius definita in 1.5.2 e sia la serie che il prodotto sono uniformemente convergenti in ogni compatto contenuto nello stesso semipiano S .

Dim. La convergenza uniforme di serie e prodotto nel semipiano $\sigma > 1$ si dimostrano esattamente come sopra, dato che $|\mu(n)| \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. Inoltre è chiaro dal Teorema 3.2.1 che il prodotto vale $1/\zeta(s)$. \square

Corollario 3.2.3 $\zeta(s) \neq 0$ per tutti gli s nel semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \sigma = \Re(s) > 1\}$.

Dim. La convergenza assoluta della serie $g(s) := \sum_n \mu(n)n^{-s}$ ed il Prodotto di Eulero implicano che $g(s)\zeta(s) = 1$ per ogni s con $\Re(s) > 1$, da cui evidentemente $\zeta(s) \neq 0$: in altre parole, un eventuale zero di ζ in $\sigma > 1$ comporterebbe un polo di $1/\zeta$. Ci si può anche basare sulla seconda dimostrazione del Teorema 1.5.3 con $f(n) = n^{-s}$: la (1.5.3) e la (1.5.4) con $x = 1 + (2/(\sigma - 1))^{1/(\sigma-1)}$ implicano

$$\left| \zeta(s) \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) - 1 \right| \leq \sum_{n > x} \frac{1}{n^\sigma} \leq \int_{x-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\sigma} = \frac{1}{\sigma-1} (x-1)^{1-\sigma} < 1,$$

e questo dà una contraddizione se $\zeta(s) = 0$. □

Teorema 3.2.4 (Riemann) *La funzione ξ definita da*

$$\xi(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) \zeta(s), \quad (3.2.2)$$

è olomorfa su \mathbb{C} , non ha zeri per $\sigma > 1$ né per $\sigma < 0$, e soddisfa l'equazione funzionale

$$\xi(s) = \xi(1-s). \quad (3.2.3)$$

La (3.2.3) fornisce dunque il prolungamento analitico di ζ a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Dim. Diamo una dimostrazione senza troppi dettagli: per $\sigma > 0$ ed $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = n^s \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx$$

e quindi per $\sigma > 1$ si ha

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n \geq 1} \Gamma(s)n^{-s} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx. \quad (3.2.4)$$

Consideriamo l'integrale

$$I(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz \quad (3.2.5)$$

dove γ è il cammino nella Figura 3.1, nella quale è sottinteso che le semirette indicate con A e C giacciono entrambe sull'asse reale negativo, e che il raggio della circonferenza è $\rho < 2\pi$. Inoltre definiamo $z^s := \exp(s \log z)$ dove $|\arg(z)| \leq \pi$. Si può far vedere che la (3.2.5) definisce una funzione analitica di s il cui valore è indipendente da ρ , e che per $\rho \rightarrow 0+$ l'integrale sulla circonferenza tende

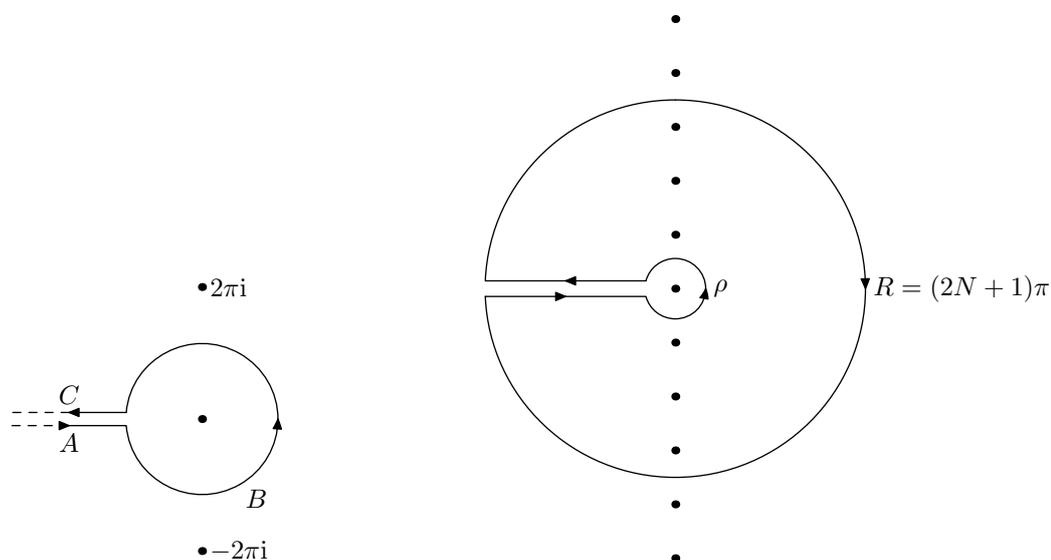


Figura 3.1: I cammini di integrazione nel Teorema 3.2.4.

a 0; combinando i due integrali sulle semirette A e C mediante i cambiamenti di variabile $z := re^{-\pi i}$, $z := re^{\pi i}$ rispettivamente, si trova

$$\pi I(s) = \sin(\pi s) \Gamma(s) \zeta(s) \quad \text{da cui} \quad \zeta(s) = \Gamma(1-s) I(s). \quad (3.2.6)$$

Questa formula fornisce il prolungamento analitico di ζ a \mathbb{C} , privato dei punti in cui $\Gamma(1-s)$ ha dei poli, e cioè \mathbb{N}^* , e possiamo dunque usarla per $\sigma < 0$. Consideriamo la funzione

$$I_N(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(N)} \frac{z^{s-1}}{e^{-z} - 1} dz$$

dove $C(N)$ è il cammino nella Figura 3.1, con convenzioni simili a quelle sopra, e la circonferenza esterna ha raggio $R = (2N+1)\pi$, con $N \in \mathbb{N}$. Si può dimostrare che per $N \rightarrow +\infty$ l'integrale sulla circonferenza esterna tende a 0; per il teorema di Cauchy abbiamo dunque

$$\begin{aligned} I_N(s) &= \sum_{n=1}^N \left((2\pi i n)^{s-1} + (-2\pi i n)^{s-1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N (2n\pi)^{s-1} 2 \cos\left(\frac{1}{2}\pi(s-1)\right) = 2(2\pi)^{s-1} \sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right) \sum_{n=1}^N n^{s-1} \\ &\rightarrow 2(2\pi)^{s-1} \sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right) \zeta(1-s) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

per $N \rightarrow +\infty$. Ma per $N \rightarrow +\infty$ si ha anche $I_N(s) \rightarrow I(s)$ e confrontando le due espressioni (3.2.6) e (3.2.7) si ottiene l'equazione funzionale nella forma asimmetrica

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi)^s \sin(\frac{1}{2}\pi s)}{\sin(\pi s)\Gamma(s)} \zeta(1-s) = \frac{(2\pi)^s}{2\cos(\frac{1}{2}\pi s)\Gamma(s)} \zeta(1-s).$$

Per ottenere la forma dell'enunciato si usano le proprietà della funzione Γ : in particolare, sostituendo al posto di $\Gamma(s)$ il valore fornito dalla (1.2.5), dopo alcune semplificazioni si ottiene

$$\zeta(s) = \pi^{s+1/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s)}{\Gamma(\frac{1}{2}s)} \zeta(1-s),$$

da cui deduciamo

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-s/2} = \pi^{-s/2+1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s\right)\zeta(1-s),$$

e l'equazione funzionale segue immediatamente moltiplicando per $\frac{1}{2}s(s-1)$. \square

La Figura 3.2 illustra alcune conseguenze dell'equazione funzionale: il valore della funzione ζ in s può essere utilizzato per ottenere il valore in $1-s$. In particolare, se ρ è uno zero nella striscia critica, allora anche $1-\rho$ è uno zero, ed è nella striscia critica. Inoltre, a causa della relazione $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$, anche $\bar{\rho}$ è uno zero, e, di nuovo per l'equazione funzionale, c'è uno zero anche in $1-\bar{\rho}$.

Corollario 3.2.5 *La funzione ζ è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, non ha zeri in $\sigma \geq 1$ e per $\sigma \leq 0$ si annulla solo nei punti $s = -2n$, con $n \in \mathbb{N}^*$. Nella striscia $0 < \sigma < 1$ ha gli stessi zeri di ξ , detti zeri non banali. Inoltre, dalle (3.2.4) e (3.2.6) si ricava la rappresentazione $\zeta(2n) = 2^{2n-1} B_n \pi^{2n} (2n)!^{-1}$ per $n \in \mathbb{N}^*$, dove i B_n sono i numeri di Bernoulli definiti nell'Appendice 1.4. Dunque $\zeta(2n)\pi^{-2n} \in \mathbb{Q}$.*

Esercizi.

€ 1. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ si ha $\zeta(2n)\pi^{-2n} \in \mathbb{Q}^+$. In particolare, $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$ e $\zeta(6) = \pi^6/945$. Suggerimento: sviluppare in serie di Fourier sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = x^n$, e poi usare l'identità di Parseval, procedendo per induzione.

Riferimenti. Aspetti storici legati alla funzione zeta: Edwards [11]. Teoria delle funzioni olomorfe: Ahlfors [1], Titchmarsh [39] oppure Whittaker & Watson [40]. Prolungamento analitico ed equazione funzionale: Davenport [7] Cap. 8, Ingham [23] §3.2 o Titchmarsh [38] Cap. 2, dove ne sono riportate ben sette dimostrazioni, oppure Titchmarsh [39] §§4.43–4.45. L'equazione funzionale è stata scoperta da Eulero: si vedano i §§2.2-2.3 di Hardy [17]. Prodotto infinito: Ingham [23] §3.8.

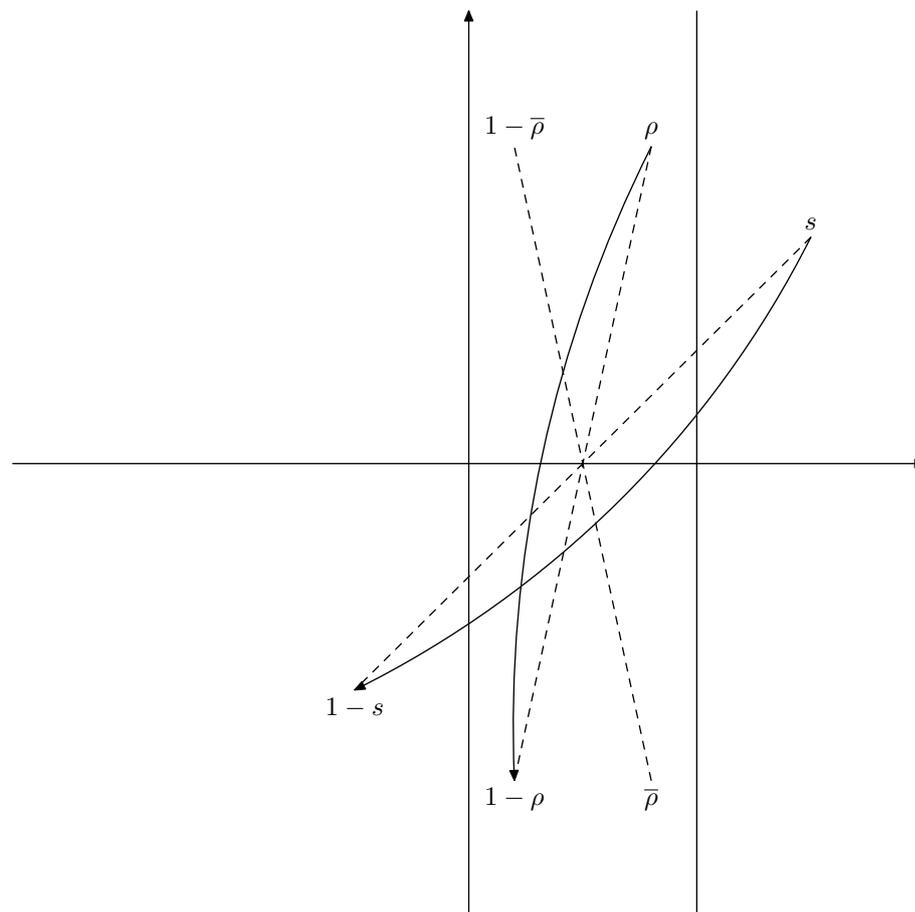


Figura 3.2: Conseguenze dell'equazione funzionale.

3.3 Distribuzione degli zeri della funzione zeta

Dato il polinomio $f(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ con $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$, e con le radici $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ripetute ciascuna secondo la propria molteplicità, è un fatto elementare che $f = g$ dove

$$g(z) = a_0 \left(1 - \frac{z}{\lambda_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \quad (3.3.1)$$

perché f e g sono polinomi dello stesso grado, con stesse radici e termine noto.

Se invece f è una funzione olomorfa qualsiasi, il prodotto corrispondente alla (3.3.1) potrebbe contenere infiniti fattori, e non è quindi detto che debba essere convergente, oppure potrebbe essere vuoto e dunque non avere nulla a che fare con f . Potremmo dire, approssimativamente, che la convergenza del prodotto dipende dalla “densità” degli zeri di f . Per una classe importante di funzioni (le cosiddette *funzioni intere di ordine finito*) gli zeri non possono essere troppo densi

(in un senso quantitativamente preciso che dipende dalla formula di Jensen 3.3.3) e quindi è possibile dimostrare il risultato che corrisponde alla fattorizzazione (3.3.1). Torneremo su questo argomento alla fine del paragrafo.

Teorema 3.3.1 (Prodotto infinito) *La funzione ξ ha un'infinità di zeri $\rho := \beta + i\gamma$ nella striscia $0 < \sigma < 1$, disposti simmetricamente rispetto all'asse reale ed alla retta $\sigma = \frac{1}{2}$. Inoltre, esistono costanti $A, B \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\xi(s) = e^{A+Bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho} \stackrel{\text{def}}{=} e^{A+Bs} \lim_{T \rightarrow +\infty} \prod_{|\rho| < T} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho},$$

dove il prodotto converge per tutti gli $s \in \mathbb{C}$, e ρ indica il generico zero non banale di ξ .

Dim. L'esistenza della fattorizzazione data nell'enunciato (il cosiddetto prodotto di Weierstrass sugli zeri) dipende dalla teoria generale delle funzioni intere di ordine finito, della quale ricordiamo brevemente qualche rudimento. Definiamo *ordine* della funzione intera f l'estremo inferiore dei numeri reali positivi μ tali che

$$f(z) = O_{\mu}(\exp(|z|^{\mu})). \quad (3.3.2)$$

Chiamiamo $n(R)$ il numero degli zeri ρ della funzione olomorfa f , contati ciascuno con la rispettiva molteplicità, tali che $|\rho| \leq R$. C'è una relazione molto stretta fra l'ordine di una funzione intera ed il numero di zeri che questa può avere all'interno del cerchio con centro nell'origine e raggio $R > 0$.

Lemma 3.3.2 (Formula di Jensen) *Sia $f: \{|z| \leq R\} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa priva di zeri su $\{|z| = R\}$ e tale che $f(0) \neq 0$. Siano $0 < \rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_n$ i moduli degli zeri di f in questo cerchio, ripetuti secondo la rispettiva molteplicità. Si ha dunque*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{f(Re^{i\theta})}{f(0)} \right| d\theta = \log \frac{R^n}{\rho_1 \cdots \rho_n} = \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt. \quad (3.3.3)$$

Non è difficile dare una dimostrazione di questo Lemma osservando che se vale separatamente per f e per g , è immediato che valga per $f \cdot g$ a causa dell'additività delle espressioni nella (3.3.3). Dunque è sufficiente dimostrare che vale per funzioni del tipo $f(z) = z - z_k$, e per le funzioni che non hanno zeri in $\{|z| \leq R\}$. La prima parte è semplice, mentre la seconda è una conseguenza immediata della formula di Cauchy, poiché, se f è olomorfa e non nulla in $\{|z| \leq R\}$, allora anche $\log f$ è olomorfa nello stesso insieme. In questo caso, tutti i membri della (3.3.3) valgono 0. L'uguaglianza a destra si dimostra osservando che lo zero

ρ_k contribuisce positivamente all'integrale solo sull'intervallo $[\rho_k, R]$, e in questo intervallo fornisce una quantità $\log(R/\rho_k)$.

Sia ora $n(R)$ il numero di zeri che la funzione intera f ha all'interno del cerchio $\{|z| \leq R\}$, ed α l'ordine di f . Per R grande, il primo membro della formula di Jensen (3.3.3) è $O_\varepsilon(R^{\alpha+\varepsilon})$. Dato che $n(R)$ è monotona crescente, si ha

$$n(R) = n(R) \int_R^{eR} \frac{1}{t} dt \leq \int_R^{eR} \frac{n(t)}{t} dt = O_\varepsilon(R^{\alpha+\varepsilon}),$$

e, in definitiva, che $n(R) = O_\varepsilon(R^{\alpha+\varepsilon})$. Da questo si deduce immediatamente che

$$\sum_{\rho} |\rho|^{-\alpha-\varepsilon} \tag{3.3.4}$$

converge, dove ρ indica il generico zero della funzione f , supponendo che $f(0) \neq 0$. Infatti, sempre per la formula di sommazione parziale, si ha

$$\sum_{|\rho_n| \leq R} \frac{1}{\rho_n^{\alpha+\varepsilon}} = \frac{n(R)}{R^{\alpha+\varepsilon}} + (\alpha + \varepsilon) \int_0^R \frac{n(t)}{t^{\alpha+\varepsilon+1}} dt.$$

Ma $n(t) = O_\varepsilon(t^{\alpha+\varepsilon/2})$, e quindi quest'ultimo integrale è convergente.

L'equazione funzionale soddisfatta dalla funzione ξ implica che l'ordine di ξ è 1: infatti, a causa della presenza della funzione Γ , per la formula di Stirling (1.2.2) si ha $\log \xi(s) \sim Cs \log s$ quando $s \rightarrow +\infty$ lungo l'asse reale. Inoltre, per la (3.2.1), la funzione ζ è limitata da $C|s|$ nel semipiano $\sigma \geq \frac{1}{2}$ privato di un intorno del punto $s = 1$, e per la formula di Stirling la funzione Γ è "grande" in modulo solo in prossimità dell'asse reale.

Questo significa che la (3.3.2) non vale con $\mu = 1$, e si può dimostrare che questo fatto implica l'esistenza di infiniti zeri di ξ : infatti si dimostra che la serie (3.3.4) diverge per $\varepsilon = 0$, e questo può accadere solo se ξ (e dunque ζ) ha infiniti zeri. L'equazione funzionale ed il Lemma 3.2.3 implicano che questi zeri sono nella striscia $0 \leq \sigma \leq 1$. È possibile dimostrare che $A = -\log 2$, $B = \frac{1}{2} \log(4\pi) - 1 - \frac{1}{2}\gamma$, e che l'ordinata dello zero con parte immaginaria positiva minima è ≈ 14.13 . \square

In generale, sia f una funzione intera di ordine α : dalla (3.3.4) sappiamo che gli zeri di f non sono troppo densi, e da questo vogliamo dedurre che è possibile dare ad f una fattorizzazione simile a quella valida per i polinomi che abbiamo visto in (3.3.1). Come possiamo garantire che il

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \prod_{|\rho| < T} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

esista finito? Una possibilità è quella di “correggere” ciascun fattore $1 - s/\rho$ mediante un opportuno esponenziale: piú precisamente, consideriamo la quantità

$$p_\rho(s) \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \exp\left(\frac{s}{\rho} + \frac{s^2}{2\rho^2} + \cdots + \frac{s^n}{n\rho^n}\right),$$

dove n è un intero fissato che sceglieremo dopo. Si ha banalmente che

$$\begin{aligned} \log p_\rho(s) &= - \sum_{m \geq 1} \frac{s^m}{m\rho^m} + \frac{s}{\rho} + \frac{s^2}{2\rho^2} + \cdots + \frac{s^n}{n\rho^n} = - \sum_{m > n} \frac{s^m}{m\rho^m} \\ &= O\left(\frac{|s|^{n+1}}{|\rho|^{n+1}}\right), \end{aligned}$$

per la formula di Taylor con resto per la funzione $\log(1 - z)$. Se scegliamo $n + 1$ in modo che $n + 1 > \alpha$, la (3.3.4) garantisce che

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{|\rho| < T} \log p_\rho(s)$$

sia uniformemente convergente in ogni compatto fissato che non contiene nessuno degli zeri di f , e quindi che il *prodotto di Weierstrass* sugli zeri di f definito da

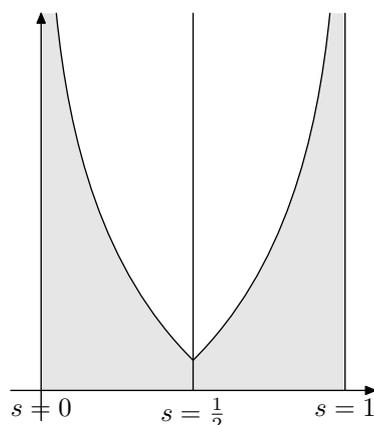
$$P_f(s) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\rho} p_\rho(s)$$

sia a sua volta convergente ad una funzione olomorfa. Osserviamo che il prodotto potrebbe essere vuoto, se f non ha zeri, ma si può dimostrare che $g(s) := f(s)/P_f(s)$ è una funzione olomorfa priva di zeri, di ordine α , ed è relativamente facile dedurre che g è l'esponenziale di un polinomio di grado al piú α . Per i dettagli si veda Titchmarsh [39] §8.24.

Nel caso della funzione ξ abbiamo $\alpha = 1$, e quindi il fattore $e^{s/\rho}$ è sufficiente a garantire la convergenza del prodotto infinito.

3.4 La regione libera da zeri

La formula esplicita nella forma troncata del Teorema 3.5.3 ci darà la dipendenza del termine d'errore nel Teorema dei Numeri Primi dalla posizione e dal numero degli zeri di zeta. Come vedremo piú dettagliatamente nel prossimo paragrafo, per poter avere una buona stima per il termine d'errore è necessario che gli addendi della somma sugli zeri non siano individualmente troppo grandi. Se per un



La parte della regione libera da zeri nel semipiano $t = \Re(s) \geq 0$. Per $t \rightarrow +\infty$ l'ampiezza della regione all'altezza t è $\gg (\log t)^{-1}$.

Figura 3.3: La regione libera da zeri.

qualche zero $\rho = \beta + i\gamma$, la parte reale β fosse molto vicina ad 1, il suo contributo (sommato a quello del coniugato $\beta - i\gamma$) alla somma in questione sarebbe

$$-\frac{x^{\beta+i\gamma}}{\beta+i\gamma} - \frac{x^{\beta-i\gamma}}{\beta-i\gamma} = -\frac{x^\beta}{\beta^2+\gamma^2} \cdot \left((\beta-i\gamma)x^{i\gamma} + (\beta+i\gamma)x^{-i\gamma} \right). \quad (3.4.1)$$

Per quel che ne sappiamo, i due termini “oscillanti” $x^{i\gamma}$ ed il suo coniugato potrebbero talvolta “coalizzarsi” e far sí che il termine in (3.4.1) sia cosí grande da cancellare in parte il termine x nella formula esplicita che vorremmo essere il termine dominante. In altre parole, la quantità in (3.4.1) potrebbe essere frequentemente cosí grande da far sí che

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Psi(x)}{x} < 1 \quad \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Psi(x)}{x} > 1.$$

In effetti, dimostreremo che eventuali zeri con β molto vicino ad 1, sempre ammesso che esistano, hanno γ molto grande, e, in definitiva, il contributo di ciascuno zero non è tale da influenzare il termine principale della formula esplicita.

Lemma 3.4.1 In $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$ valgono le identità

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{mp^{ms}} \quad e \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Dim. La prima relazione segue dall'identità nell'enunciato del Teorema di Eulero–Riemann 3.2.1 e dalla formula di Taylor per $\log(1-x)$. Derivando membro a membro la seconda uguaglianza si trova

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{-m \log p}{mp^{ms}} = -\sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

come si voleva. \square

Lemma 3.4.2 *Esiste un numero complesso C tale che*

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{1}{s-1} + C + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{2}s + 1 \right) - \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right)$$

per tutti gli s complessi diversi da zeri o poli di ζ .

Dim. Osserviamo che una forma equivalente della definizione della funzione ξ è $\xi(s) = (s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)\zeta(s)$. Da questa deduciamo immediatamente che

$$\frac{d}{ds} \log \xi(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{2}s + 1 \right) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s).$$

D'altra parte, dal Teorema 3.3.1 deduciamo

$$\frac{d}{ds} \log \zeta(s) = B + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right),$$

e la tesi segue immediatamente. \square

Teorema 3.4.3 *Esiste una costante $c \in \mathbb{R}^+$ tale che per ogni zero non banale di zeta $\rho = \beta + i\gamma$ si ha*

$$\beta < 1 - \frac{c}{\log |\gamma|}.$$

Dim. Partiamo da un'osservazione di Mertens: per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ si ha

$$2(1 + \cos \theta)^2 = 3 + 4 \cos \theta + \cos(2\theta) \geq 0. \quad (3.4.2)$$

Inoltre, nella regione $\sigma > 1$, per il Lemma 3.4.1 si ha

$$\Re \log \zeta(\sigma + it) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{\cos(t \log p^m)}{mp^{m\sigma}}.$$

Usiamo quest'ultima formula con $s = \sigma$, $s = \sigma + it$ ed $s = \sigma + 2it$, ottenendo

$$3 \log \zeta(\sigma) + 4 \Re \log \zeta(\sigma + it) + \Re \log \zeta(\sigma + 2it) \geq 0,$$

da cui, passando all'esponenziale,

$$\zeta^3(\sigma) |\zeta^4(\sigma + it) \zeta(\sigma + 2it)| \geq 1. \quad (3.4.3)$$

Poiché per $\sigma \rightarrow 1+$ si ha che $\zeta(\sigma) \sim (\sigma - 1)^{-1}$ e che $\zeta(\sigma + 2it)$ resta limitata, se $1 + it$ fosse uno zero di ζ il primo membro della (3.4.3) sarebbe infinitesimo, una contraddizione.

Questo ragionamento può essere esteso per dare il risultato dell'enunciato, ma conviene considerare ζ'/ζ invece di $\log \zeta$ per evitare problemi di prolungamento analitico. Prendiamo la regione $S = \{s \in \mathbb{C} : 1 \leq \sigma \leq 2, t \geq 2\}$: per il Lemma 3.4.1 abbiamo

$$-\Re \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \cos(t \log n).$$

La relazione (3.4.2) dunque implica per $s = \sigma + it \in S$

$$-3 \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + 4 \left(-\Re \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) \right) + \left(-\Re \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it) \right) \geq 0. \quad (3.4.4)$$

Da qui in poi, A_j indicheranno opportune costanti positive. Per quanto riguarda il primo addendo, il polo semplice di ζ in $s = 1$ implica che nella regione S si ha

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) = \frac{1}{\sigma - 1} + O(1) \quad \text{e quindi} \quad -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) < \frac{1}{\sigma - 1} + A_1.$$

Consideriamo ora il Lemma 3.4.2: i primi tre termini in valore assoluto sono maggiorati da $A_2 \log t$. Inoltre, un rapido calcolo mostra che nella stessa regione si ha $\Re(\rho^{-1} + (s - \rho)^{-1}) > 0$ per ogni zero non banale. Scegliamo dunque uno di questi zeri $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ e $t = \gamma_0$: in definitiva abbiamo le disuguaglianze

$$-\Re \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i|\gamma_0|) < A_3 \log |\gamma_0| - \frac{1}{\sigma - \beta_0}, \quad -\Re \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2i|\gamma_0|) < A_4 \log |\gamma_0|.$$

Sostituendo nella (3.4.4) ricaviamo, per un $A > 0$ opportuno, la disuguaglianza

$$\frac{4}{\sigma - \beta_0} < \frac{3}{\sigma - 1} + A \log |\gamma_0|,$$

e scegliendo infine $\sigma = 1 + (2A \log |\gamma_0|)^{-1}$ si ottiene la tesi con $c = (14A)^{-1}$. \square

Il prossimo risultato è un corollario del Lemma 3.4.2.

Lemma 3.4.4 *Per τ sufficientemente grande, se sul segmento $-1 \leq \sigma \leq 2, t = \tau$ non vi sono zeri della funzione ζ , allora si ha*

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i\tau) = \sum_{\substack{\rho \\ |\tau - \gamma| < 1}} \frac{1}{\sigma + i\tau - \rho} + O(\log \tau).$$

Inoltre, il numero di addendi nella somma è $O(\log \tau)$.

Teorema 3.4.5 (Riemann-von Mangoldt) Per $T \rightarrow +\infty$ si ha

$$\begin{aligned} N(T) &\stackrel{\text{def}}{=} |\{\rho = \beta + i\gamma: \zeta(\rho) = 0, \beta \in [0, 1], \gamma \in [0, T]\}| \\ &= \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T). \end{aligned}$$

Dim. Supponiamo che $T > 0$ non coincida con l'ordinata di uno zero della funzione ξ : per il principio dell'argomento si ha

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{R(T)} \arg \xi(s)$$

dove $R(T)$ è il rettangolo con vertici in $s_1 = 2$, $s_2 = 2 + iT$, $s_3 = -1 + iT$, $s_4 = -1$. Dato che ξ è reale e non nulla sul segmento $[-1, 2]$ non c'è variazione dell'argomento. Inoltre, per l'equazione funzionale 3.2.4, la variazione sulla parte del rettangolo con $\sigma \leq \frac{1}{2}$ è esattamente uguale a quella sul resto, e quindi

$$N(T) = \frac{1}{\pi} \Delta_{L(T)} \arg \xi(s)$$

dove $L(T)$ è la spezzata costituita dai due segmenti di estremi s_1 ed s_2 , s_2 ed $s_5 = \frac{1}{2} + iT$. Esaminiamo separatamente i fattori che compaiono nella Definizione (3.2.2) di ξ , che scriviamo come $\xi(s) = (s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{1}{2}s+1)\zeta(s)$. Per la formula di Stirling generalizzata (1.2.2) per la funzione Γ di Eulero abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta_{L(T)} \arg(s-1) &= \frac{1}{2}\pi + O(T^{-1}), \\ \Delta_{L(T)} \arg \pi^{-s/2} &= -\frac{1}{2}T \log \pi, \\ \Delta_{L(T)} \arg \Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right) &= \frac{1}{2}T \log \frac{1}{2}T - \frac{1}{2}T + \frac{3}{8}\pi + O(T^{-1}). \end{aligned}$$

Per ottenere la tesi resta da dimostrare che $\Delta_{L(T)} \arg \zeta(s) = O(\log T)$. Dato che ζ è reale e positiva in $s = 2$ e non nulla in $\sigma > 1$, la variazione dell'argomento sul tratto verticale è limitata. Ricordiamo che per una funzione olomorfa f la variazione dell'argomento di f tra i punti $\frac{1}{2} + iT$ e $2 + iT$ è data da

$$\Delta \arg(f) = \Delta(\Im(\log(f))) = \int_{1/2}^2 \Im\left(\frac{f'}{f}(\sigma + iT)\right) d\sigma. \quad (3.4.5)$$

Dobbiamo dunque trovare una stima per $\Im(\zeta'(s)/\zeta(s))$ sul segmento di estremi $\frac{1}{2} + iT$ e $2 + iT$. Il Lemma 3.4.4 implica che

$$\Delta_{L(T)} \arg \zeta(s) = - \int_{1/2}^2 \Im\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT)\right) d\sigma + O(1)$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma|<1}} \int_{1/2}^2 \Im \left(\frac{1}{\sigma + iT - \rho} \right) d\sigma + O(\log T) \\
&= - \sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma|<1}} \Delta_{L(T)} \arg(\sigma + iT - \rho) + O(\log T).
\end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione, poiché per la (3.4.5) si ha $\Delta_{L(T)} \arg(\sigma + iT - \rho) \leq \pi$ per ciascuno degli zeri nell'ultima somma, e, sempre per il Lemma 3.4.4, la somma in questione ha $O(\log T)$ addendi. \square

Riferimenti. Teorema 3.4.3: Davenport [7] Cap. 13, Ingham [23] §3.9 o Titchmarsh [38], §6.19. Teorema 3.4.5: Davenport [7] Cap. 15, Ingham [23] §4.2.

3.5 La formula esplicita: legame fra psi e zeta

Ora vedremo come ci sia una stretta relazione fra la funzione ψ e la “derivata logaritmica” della funzione ζ , e cioè ζ'/ζ , esprimendo ψ in termini di un integrale improprio sulla retta dei numeri complessi di parte reale $c > 1$ fissata, come si vede dalla relazione (3.5.1). Una volta trovata questa relazione integrale, che può essere invertita come mostra la (3.7.1), vorremo deformare il cammino di integrazione come indicato nella Figura 3.4 per poter prendere il contributo del polo semplice di ordine 1 che ζ'/ζ ha in $s = 1$. Naturalmente dovremo tenere conto di eventuali altri zeri che la funzione ζ possa avere all'interno del cammino deformato, perché anche questi daranno un contributo all'integrale in questione, e dovremo anche scegliere opportunamente il cammino in modo da evitare questi zeri. Per il Teorema di Cauchy, l'integrale originario (3.5.1) e quello sul cammino deformato differiscono per il valore del residuo della funzione integranda ai poli, moltiplicato per $2\pi i$: sappiamo già che ζ ha un polo semplice con residuo 1 in $s = 1$ (e quindi anche $-\zeta'/\zeta$ ha un polo semplice con residuo 1 nello stesso punto). Dunque, il contributo della funzione integranda nel punto $s = 1$ vale x , e questo è il termine principale atteso per $\psi(x)$. La funzione integranda ha un polo semplice in $s = 0$, con residuo $-\zeta'(0)/\zeta(0)$, ed ha poli in tutti gli zeri di zeta nella porzione di striscia critica di parte immaginaria compresa fra $-T$ e T . Se per semplicità supponiamo che questi zeri siano semplici, vediamo subito che il contributo di ciascuno di questi vale $-x^\rho/\rho$. Inoltre vi sono i poli negli “zeri banali” $s = -2$, $s = -4, \dots, s = -2N$. Non resta quindi che valutare il contributo dei due tratti orizzontali e del tratto verticale sulla retta $\sigma = -2N - 1$.

A questo punto vogliamo portare a termine il programma esposto all'inizio del paragrafo precedente: una volta ottenuta la relazione del Lemma 3.5.1, deformiamo il cammino di integrazione in modo da “sostituire” il tratto della retta $\sigma = c$ per cui $t \in [-T, T]$ con una spezzata costituita dal segmento di estremi $c - iT$ e

$-2N - 1 - iT$, dal segmento di estremi $-2N - 1 - iT$ e $-2N - 1 + iT$ e dal segmento di estremi $-2N - 1 + iT$ e $c + iT$. Il tratto verticale non passa per nessuno zero della funzione ζ , poiché questa nel semipiano $\sigma < 0$ si annulla solo in $s = -2, -4, -6, \dots$, mentre i tratti orizzontali devono evitare gli eventuali zeri di ζ nella striscia critica. Abbiamo dimostrato che ζ ha infiniti zeri in questa striscia (il Teorema di Riemann–von Mangoldt 3.4.5), ma ovviamente, essendo meromorfa, ne ha un numero finito in ogni insieme limitato, e quindi, a meno di modificare T di una quantità limitata, è certamente possibile scegliere il cammino richiesto.

Lemma 3.5.1 (Formula di Perron) *Per $x > 0$ e $c > 1$ si ha*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} x^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, 1), \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 1, \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Dim. È un'applicazione immediata del Teorema dei residui. □

Teorema 3.5.2 (Riemann–von Mangoldt) *Per $x > 1$ vale la formula esplicita:*

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}),$$

dove la somma deve essere intesa in senso simmetrico (i termini provenienti da ρ e da $\bar{\rho}$ devono essere presi insieme), e $\psi_0(x)$ è la media dei valori di ψ a destra ed a sinistra di x ,

$$\psi_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} (\psi(x + \varepsilon) + \psi(x - \varepsilon)).$$

Dim. È un'applicazione (non banale) della formula di Perron: infatti per $c > 1$ si ha

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds. \quad (3.5.1)$$

Il risultato si ottiene modificando in modo opportuno il cammino di integrazione come descritto all'inizio del paragrafo. Per portare a termine la dimostrazione sono necessarie informazioni su $|\zeta'/\zeta(s)|$ sui tratti orizzontali e su quello verticale a sinistra nella Figura 3.4, che qui omettiamo per brevità. □

Utilizzando una forma troncata della formula di Perron, possiamo ottenere la seguente forma approssimata della formula esplicita, piú utile nelle applicazioni: in sostanza la dimostrazione è analoga a quella del Teorema 3.5.2, ma non si fa tendere T a $+\infty$.

Teorema 3.5.3 (Formula esplicita troncata) Per $x > 1$ intero e $T > 1$ si ha

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x}{T} (\log xT)^2\right). \quad (3.5.2)$$

Riferimenti. Formula di Perron 3.5.1: Davenport [7], Cap. 17, Ingham [23], §4.5 o Titchmarsh [38], Lemma 3.12. Formula esplicita 3.5.3: Davenport [7], Cap. 17 o Ingham [23], §4.6.

3.6 Dimostrazione del Teorema dei Numeri Primi

Riassumiamo brevemente la strategia seguita per dimostrare il Teorema dei Numeri Primi nella forma 2.1.3: utilizzando l'equazione funzionale e le proprietà della funzione Γ di Eulero si ottiene una rappresentazione di $-\zeta'/\zeta$ che dà la formula esplicita 3.5.3 nella forma approssimata, per mezzo della formula di Perron. Poi, utilizziamo la regione libera da zeri del Teorema 3.4.3 per stimare il contributo degli zeri non banali alla formula esplicita, e quindi per ottenere il resto dato dal Teorema 2.1.3.

Dalla formula esplicita del Teorema 3.5.3 ricaviamo

$$\psi(x) - x \ll \left\{ \max_{0 < \gamma \leq T} x^\beta \right\} \sum_{0 < \gamma \leq T} \frac{1}{\gamma} + \frac{x}{T} (\log xT)^2,$$

dove abbiamo scritto implicitamente $\rho = \beta + i\gamma$ per il generico zero non banale di zeta. Si ricordi che gli zeri sono disposti simmetricamente rispetto all'asse reale. Il massimo può essere stimato usando la regione libera da zeri fornita dal Teorema 3.4.3, mentre per la somma utilizziamo la stima per il numero degli zeri della funzione zeta con parte immaginaria $|\gamma| \leq T$ data dal Teorema 3.4.5, con la sommazione parziale. In definitiva, possiamo scrivere

$$\psi(x) - x \ll x(\log T)^2 \exp\left\{-c \frac{\log x}{\log T}\right\} + \frac{x}{T} (\log xT)^2, \quad (3.6.1)$$

nella quale scegliamo T come funzione di x in modo tale che $(\log T)^2 = \log x$. Sostituendo e semplificando si trova infine $\psi(x) - x \ll x \exp\{-c'(\log x)^{1/2}\}$.

Per ottenere il risultato che riguarda $\pi(x)$, conviene ricordare che per il Lemma 2.2.4 si ha $\theta(x) = \psi(x) + O(x^{1/2})$. Per sommazione parziale ed integrazione per parti, si ottiene

$$\pi(x) = \text{li}(x) + O\left(x \exp\{-c''(\log x)^{1/2}\}\right),$$

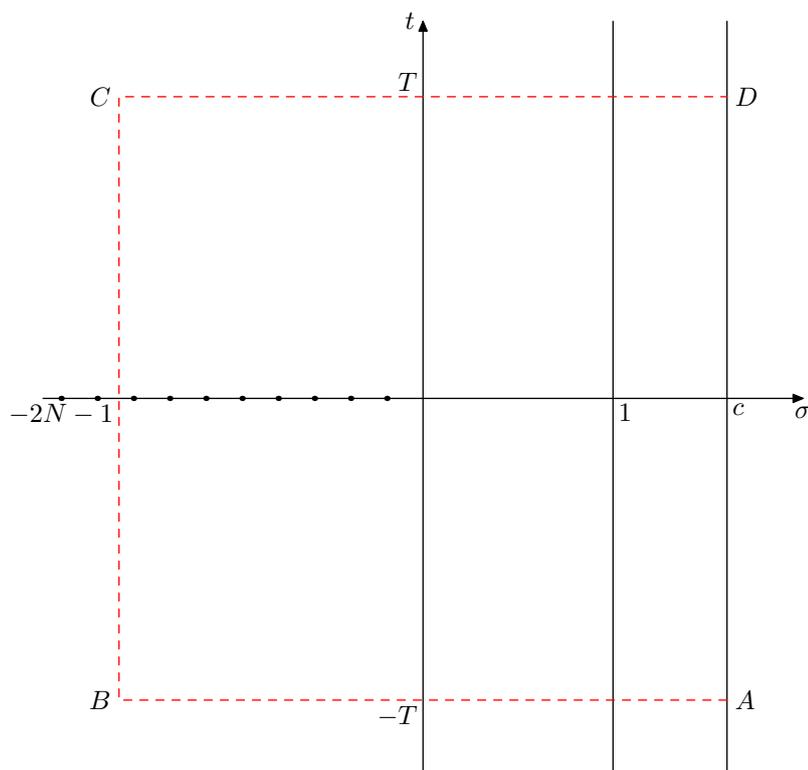


Figura 3.4: Il cammino di integrazione che si usa per dimostrare la forma troncata della fomula esplicita. I tratti orizzontali del cammino deformato devono evitare gli zeri di ζ in $0 < \sigma < 1$, mentre il tratto verticale deve evitare gli zeri banali $s = -2n$, indicati sull'asse reale negativo, e quindi è possibile scegliere un segmento della retta $\sigma = -2N - 1$. In un secondo tempo si fa tendere N a $+\infty$.

che è molto piú forte del risultato che si potrebbe ottenere sviluppando le tecniche elementari del Capitolo 2.

Riferimenti. Dimostrazione del Teorema dei Numeri Primi: Davenport [7], Cap. 18. Si vedano anche i Capp. 1–4 di Hardy [18] per una descrizione dei risultati di questo Capitolo nel loro contesto e senza troppi dettagli. Una dimostrazione non elementare basata sul crivello è data da Hildebrand [21]. Un'altra dimostrazione analitica si trova in Wiener [41] §17, o in Rudin [37] §§9.8–9.12. Gerig [13] ha dato una breve dimostrazione non elementare, nella quale si usano solo dell'analisi armonica e le proprietà della serie di Dirichlet per zeta in $\sigma > 1$. Una semplice dimostrazione analitica si trova in Newman [32]. Si veda anche Ingham [23] Cap. 2.

3.7 La congettura di Riemann

Teorema 3.7.1 Sia $\Theta := \sup\{\beta: \rho = \beta + i\gamma \text{ è uno zero di } \zeta\}$. La congettura di Riemann 2.1.4 è equivalente a $\Theta = \frac{1}{2}$.

Dim. Posto $R(x) := \psi(x) - x$, con la formula di sommazione parziale si trova la rappresentazione

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = s \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx = \frac{s}{s-1} + s \int_1^{+\infty} \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx, \quad (3.7.1)$$

inizialmente in $\sigma > 1$. Ma se $R(x) \ll x^{1/2}(\log x)^2$, l'ultimo integrale è uniformemente convergente in $\sigma \geq \frac{1}{2} + \delta$ per ogni $\delta > 0$, e quindi il secondo membro definisce una funzione analitica in $\sigma > \frac{1}{2}$ privato del punto $s = 1$. Per prolungamento analitico, l'unica singolarità della funzione a primo membro in $\sigma > \frac{1}{2}$ può essere in $s = 1$. In altre parole, ζ non si annulla in questo semipiano. L'altra implicazione si dimostra utilizzando la formula esplicita, come nel paragrafo precedente, scegliendo $T = x^{1/2}$. \square

Si osservi che le due formule (3.5.1) e (3.7.1) rappresentano una coppia trasformata e antitrasformata di Mellin, che formalmente sono trasformazioni dello stesso tipo di quella di Fourier, e il cui esempio piú noto è la coppia e^{-x} , $\Gamma(s)$. È possibile scrivere una coppia di formule analoga che coinvolge indirettamente $\pi(x)$:

$$\log \zeta(s) = s \int_1^{+\infty} \frac{\Pi(t)}{t^{s+1}} dt \quad \Pi_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \log \zeta(s) \frac{x^s}{s} ds$$

dove

$$\Pi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(x) + \pi(x^{1/2}) + \pi(x^{1/3}) + \dots$$

e Π_0 è la regolarizzata di Π definita come ψ_0 a partire da ψ (cfr l'enunciato del Teorema 3.5.2). Inoltre si ha

$$\log \zeta(s) = s \int_1^{+\infty} \frac{\pi(t)}{t(t^s - 1)} dt,$$

ma è piú difficile trovare l'inversa di questa. Il motivo analitico per cui la funzione ψ è piú "naturale" deriva dal fatto che la funzione $-\zeta'/\zeta$ ha singolarità di tipo polare agli zeri ed al polo di ζ e non presenta difficoltà di prolungamento analitico, mentre la funzione $\log \zeta$ ha evidenti problemi di prolungamento negli stessi punti.

Riferimenti. Congettura di Riemann 2.1.4 e sue conseguenze: Davenport [7] Cap. 18, Ingham [23] §§4.8–4.9 oppure Titchmarsh [38] Cap. 14. Per una vasta panoramica su analoghe congetture in situazioni diverse si veda Bombieri [4]. Risultati aggiornati relativi al calcolo numerico degli zeri di ζ si trovano all'indirizzo <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeroscompute.html>

3.8 Considerazioni finali

3.8.1 Distribuzione degli zeri e termine d'errore

Si può dimostrare che il Teorema dei Numeri Primi nella forma che seguirebbe dalle tecniche “elementari” sviluppate nel Capitolo 2 (cioè la relazione $\pi(x) \sim x(\log x)^{-1}$) è equivalente all'affermazione $\zeta(1+it) \neq 0$ per ogni $t > 0$. In altre parole, non è necessario conoscere la distribuzione degli zeri della funzione ζ , né altre informazioni relative alla regione $\sigma < 1$. Questo fatto segue dalla teoria di Wiener. Pintz [34] ha dimostrato che c'è una relazione quantitativa molto precisa fra regioni libere da zeri per la funzione zeta e termine d'errore nel Teorema dei Numeri Primi. Poniamo

$$M(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|\pi(t) - \text{li}(t)| : t \in [2, x]\}.$$

In effetti, si ha che

$$\log \frac{x}{M(x)} \sim \min_{\rho=\beta+i\gamma} \{(1-\beta) \log x + \log |\gamma|\},$$

quando $x \rightarrow +\infty$. Per esempio, se $\pi(x) = \text{li}(x) + O(x \exp(-(\log x)^b))$ per qualche $b \in (0, 1)$, allora il risultato di Pintz implica che qualunque sia $x \geq 2$ e qualunque sia lo zero non banale $\rho = \beta + i\gamma$ di ζ , si ha

$$(1-\beta) \log x + \log |\gamma| \geq (1+o(1))(\log x)^b$$

da cui segue (essenzialmente)

$$1-\beta \geq (\log x)^{b-1} - \frac{\log |\gamma|}{\log x}.$$

Si cerca il massimo assoluto della funzione a secondo membro (ricordando che $b < 1$), e si trova che questa ha un massimo per $\log x_0 = ((\log |\gamma|)/(1-b))^{1/b}$ da cui segue che la funzione ζ non ha zeri nella regione

$$\sigma > 1 - \frac{c(b)}{(\log |t|)^{(1-b)/b}}.$$

L'implicazione inversa da una regione libera da zeri della forma $\sigma > 1 - c(\log t)^{-\theta}$ alla stima $O(x \exp(-c'(\log x)^{1/(\theta+1)}))$ per il termine d'errore si può dimostrare scegliendo $(\log T)^{\theta+1} = \log x$ nella (3.6.1).

Un calcolo molto semplice mostra che se $\pi(x) = \text{li}(x) + O(x^\Theta)$, si ha $(1-\beta) \log x + \log |\gamma| \geq (1+o(1))(1-\Theta) \log x$ da cui segue $\log |\gamma| \geq (1+o(1))(\beta-\Theta) \log x$. Se esistesse uno zero $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ di ζ con $\beta_0 > \Theta$, si potrebbe prendere x abbastanza grande da rendere falsa quest'ultima relazione. Quindi, come abbiamo visto anche sopra, si ha necessariamente $\beta_0 \leq \Theta$.

Riferimenti. Davenport [7] Capp. 1 e 4.

3.9 Problemi aperti

Congettura di Riemann a parte, un miglioramento della regione libera da zeri porterebbe immediatamente ad un corrispondente miglioramento delle stime per $\pi(x) - \text{li}(x)$. Al momento attuale non è noto se, con la notazione del §3.7, si abbia $\Theta < 1$. Questo risultato sarebbe probabilmente il più importante degli ultimi 130 anni.

Una congettura più debole di quella di Riemann, ma che avrebbe importanti conseguenze per le applicazioni, è l'Ipotesi di Densità: posto

$$N(\sigma, T) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\rho = \beta + i\gamma: \zeta(\rho) = 0, \beta \geq \sigma, |\gamma| \leq T\}|,$$

si congettura che $N(\sigma, T) \ll T^{2(1-\sigma)+\varepsilon}$ uniformemente per $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$. Bourgain [5] ha dimostrato che la stima di densità vale in $\frac{25}{32} \leq \sigma \leq 1$, ed è noto che stime più forti sono valide vicino a $\sigma = 1$. Se fosse vera questa congettura, si avrebbe che (2.4.2) vale uniformemente per $x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \leq y \leq x$. Al momento attuale il risultato migliore vede $\frac{12}{5}$ al posto di 2 nell'esponente.

Bibliografia

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, third ed., Mc Graw-Hill, 1979.
- [2] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1975.
- [3] P. T. Bateman and H. G. Diamond, *A hundred years of prime numbers*, Amer. Math. Monthly **103** (1996), 729–741.
- [4] E. Bombieri, *Problems of the Millennium: the Riemann Hypothesis*, 2000, See http://www.claymath.org/prize_problems/index.html.
- [5] J. Bourgain, *On large values estimates for Dirichlet polynomials and the density hypothesis for the Riemann zeta function*, Int. Math. Res. Not. **2000**, No. **3** (2000), 133–146.
- [6] K. Chandrasekharan, *Introduction to Analytic Number Theory*, Grundlehren math. Wiss., vol. 148, Springer, 1968.
- [7] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 74, Springer, 2000.
- [8] M. Deléglise and J. Rivat, *Computing $\pi(x)$: The Meissel, Lehmer, Lagarias, Miller, Odlyzko method*, Math. Comp. **65** (1996), 235–245.
- [9] ———, *Computing $\psi(x)$* , Math. Comp. **67** (1998), 1691–1696.
- [10] H. G. Diamond, *Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers*, Bull. Amer. Math. Soc. **3** (1982), 553–589.
- [11] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, 1974, Dover Reprint 2001.
- [12] J. Friedlander, A. Granville, A. Hildebrand, and H. Maier, *Oscillation theorems for primes in arithmetic progressions and for sifting functions*, Journal of the American Mathematical Society **4** (1991), 25–86.

- [13] S. Gerig, *A Simple Proof of the Prime Number Theorem*, J. Number Theory **8** (1976), 131–136.
- [14] L. J. Goldstein, *A History of the Prime Number Theorem*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 599–615.
- [15] A. Granville, *Harald Cramér and the distribution of prime numbers*, Scand. Actuarial J. **1** (1995), 12–28.
- [16] ———, *Unexpected irregularities in the distribution of prime numbers*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich, Switzerland, 1994 (Basel), Birkhäuser, 1995, pp. 388–399.
- [17] G. H. Hardy, *Divergent Series*, second ed., Chelsea, New York, 1991.
- [18] ———, *Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and works*, third ed., Chelsea, New York, 1999.
- [19] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, fifth ed., Oxford Science Publications, Oxford, 1979.
- [20] D. R. Heath-Brown, *The number of primes in a short interval*, J. reine angew. Math. **389** (1988), 22–63.
- [21] A. Hildebrand, *The Prime Number Theorem via the large sieve*, Mathematika **33** (1986), 23–30.
- [22] A. Hildebrand and H. Maier, *Irregularities in the distribution of primes in short intervals*, J. reine angew. Math. **397** (1989), 162–193.
- [23] A. E. Ingham, *The Distribution of Prime Numbers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [24] J. Lagarias, *An elementary problem equivalent to the Riemann Hypothesis*, Amer. Math. Monthly **109** (2002), 534–543.
- [25] J. E. Littlewood, *Sur la distribution des nombres premiers*, C. R. Acad. Sc. Paris **158** (1914), 1869–1872.
- [26] H. Maier, *Primes in short intervals*, Michigan Math. J. **32** (1985), 221–225.
- [27] G. Marsaglia and J. C. W. Marsaglia, *A new derivation of Stirling's approximation to $n!$* , Amer. Math. Monthly **97** (1990), 826–829.

- [28] H. L. Montgomery, *Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis*, CBMS, vol. 84, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [29] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *On the large sieve*, *Mathematika* **20** (1973), 119–134.
- [30] M. Nair, *A new method in elementary prime number theory*, *J. London Math. Soc. (2)* **25** (1982), 385–391.
- [31] ———, *On Chebyshev-type inequalities for primes*, *Amer. Math. Monthly* **89** (1982), 126–129.
- [32] D. J. Newman, *Simple analytic proof of the Prime Number Theorem*, *Amer. Math. Monthly* **87** (1980), 693–696.
- [33] J. Pintz, *On Legendre’s prime number formula*, *Amer. Math. Monthly* **87** (1980), 733–735.
- [34] ———, *On the remainder term of the prime number formula and the zeros of the Riemann zeta-function*, *Number Theory (Noordwijkerhout)*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1068, Springer, 1984, pp. 186–197.
- [35] G. F. B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, *Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* (1859), 671–680, in “*Gesammelte Mathematische Werke*” (ed H. Weber), Dover reprint 1953.
- [36] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulae for some functions of prime numbers*, *Illinois J. Math.* **6** (1962), 64–94.
- [37] W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc Graw-Hill, 1973, Reprint TMH, New Delhi (1985).
- [38] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, second ed., Oxford University Press, Oxford, 1986.
- [39] ———, *The Theory of Functions*, second ed., Oxford University Press, Oxford, 1988.
- [40] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Modern Analysis*, fourth ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1927.
- [41] N. Wiener, *The Fourier Integral and Certain of its Applications*, Dover, New York, 1958.