Università degli Studi di Parma
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Esercizi per il Corso di Matematica C
Corso di Laurea in Scienze e Tecnologie per l'Ambiente e le Risorse

Alessandro Zaccagnini

Anno Accademico 2004–2005

1 Equazioni differenziali del primo ordine

1.1 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

1. Risolvere le seguenti equazioni differenziali nel dominio indicato a fianco.

$$y' = y - x \tag{1}$$
$$y' - 2xy = 1 \tag{2}$$
$$y' + \frac{y}{x + x^2} = x - 2 \quad \text{per } x \in (-1, 0) \tag{3}$$
$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sin x} \quad \text{per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \tag{4}$$

2. Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili, facendo attenzione alle eventuali soluzioni stazionarie.

$$y' = xy^2 \tag{1}$$
$$y' = x\left(1 + \frac{1}{y}\right) \qquad \text{per } y \neq 0 \tag{2}$$
$$y' = \frac{1}{y - x} \qquad \text{per } y \neq x \tag{3}$$
$$y' = (y + 1)\frac{x}{x^2 + 1} \tag{4}$$

Suggerimento: nella (3) porre $u = y - x$.

3. Risolvere le seguenti equazioni differenziali omogenee ponendo $v = y/x$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+y}{x-y} && \text{per } y \neq x && (1) \\ y' &= \frac{y^2}{x^2} - 2 && \text{per } x \neq 0 && (2) \\ y' &= \frac{y}{x} \log \frac{y}{x} && \text{per } x, y > 0 && (3) \end{aligned}$$

Suggerimento: nella (3) porre $v = e^t$ per determinare una delle primitive necessarie.

4. Studiare qualitativamente le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali.

$$\begin{aligned} y' &= y - x && (1) \\ y' &= 4y(1-y) && (2) \\ y' &= 2xy && (3) \end{aligned}$$

Se possibile, determinare esplicitamente le soluzioni.

1.2 Problemi di Cauchy del primo ordine

5. Risolvere i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = A \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} y' \sin x = y \log y \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y''(x^2+1) = 2xy' \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \quad (3)$$

Suggerimento: nel problema (3) porre $u = y'$ e risolvere prima l'equazione differenziale risultante in u (che è del primo ordine).

6. $(22.5.1996)$. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (4+y^2)e^x \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Suggerimento: si scelga una sostituzione del tipo $y = au$, per un opportuno valore di $a > 0$.

7. $(22.5.1996)$. Durante una reazione chimica la concentrazione di una certa sostanza $C(t)$ varia nel tempo secondo la legge

$$\begin{cases} C'(t) = C(t)(1 - C(t)) \\ C(0) = 0.3. \end{cases}$$

Determinare $C(t)$ e $\lim_{t \to +\infty} C(t)$.

8. $(4.6.1996)$. In un modello di crescita di una popolazione si trova un'equazione differenziale con ritardo del tipo

$$N'(t) = -\frac{\pi}{2T} N(t-T), \qquad T > 0.$$

Provare che le funzioni del tipo $N(t) = a \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$, $a \in \mathbb{R}$ sono soluzioni dell'equazione.

9. (17.9.1996). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y(x)-4} & \text{per } x \geq 0, \\ y(0) = a, \end{cases}$$

dove a è un numero reale assegnato. C'è soluzione per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$?

10. (8.10.1996). Un processo di natalità-mortalità-immigrazione è descritto dall'equazione differenziale

$$N'(t) = -\lambda N(t) + \nu, \tag{1}$$

dove $\lambda > 0$, $\nu > 0$.

1. verificare che fra tutte le soluzioni di (1) una è costante, e calcolarla;
2. detta c la costante del punto precedente, provare che tutte le soluzioni di (1) hanno limite c per $t \to +\infty$;
3. come cambiano le risposte alla precedenti domande se $\lambda = 0$?

11. (17.2.1997). Determinare le primitive della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$. Un lago di area S km^2 è infestato da una pianta acquatica che, al tempo t, misurato in giorni, occupa una superficie di $A(t)$ km^2. Sperimentalmente, si trova che la funzione $A(t)$ soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} A'(t) = \alpha A(t)(S - A(t)) & \text{per } t \geq 0, \\ A(0) = \dfrac{1}{100} S, \end{cases} \tag{2}$$

dove $\alpha = \alpha_0$ è dato. Si dica in quale istante t_0 la pianta ha occupato metà del lago. Per tenere sotto controllo la crescita, gli amministratori locali decidono di utilizzare un prodotto chimico il cui effetto è quello di ridurre il valore di α in (2) ad $\dfrac{1}{2}\alpha_0$. Supponendo di usare questo prodotto sin dall'inizio, in quale istante t_1 la pianta ha occupato metà del lago? Suggerimento: si risolva direttamente (2), sostituendo il valore di α solo alla fine.

12. (17.12.1998). In una certa reazione chimica due sostanze si combinano in quantità uguali. Sapendo che all'inizio sono presenti A grammi della prima sostanza e B della seconda (con $A < B$), e che la quantità di ciascuna sostanza utilizzata al tempo t, che chiameremo $y(t)$, soddisfa l'equazione differenziale

$$y'(t) = r\big(A - y(t)\big)\big(B - y(t)\big)$$

dove $r > 0$ è il tasso di reazione, determinare $y(t)$ e $\lim_{t\to+\infty} y(t)$. Come diventano le risposte se $A = B$?

13. (2.6.1999). Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2xy\log y \\ y(0) = a \end{cases}$$

e si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}^+$ si hanno soluzioni singolari. Disegnare le curve integrali.

14. (21.7.1999). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y\cos x = e^{\sin x}\log x \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

15. (13.10.1999). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2yy' = 2\sin x\cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

16. (22.2.2000). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = \sin^2 x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

17. (7.6.2000). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-3)(2x-1) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

18. (12.7.2000). In una reazione chimica la concentrazione $C(t)$ di un certo reagente soddisfa l'equazione differenziale

$$C'(t) = \alpha C(t)\big(1 - C(t)\big) \qquad \text{dove} \qquad \alpha = 0.01.$$

Sapendo che $C(0) = 0.05$ determinare $C(100)$.

19. (20.9.2000). In una stanza a temperatura ambiente di 20°C viene posto un oggetto a temperatura $T_0 = 30$°C. Sapendo che la temperatura $T(t)$ misurata in °C soddisfa l'equazione differenziale $T'(t) = -\alpha(T(t) - 20)$ (dove t è misurato in secondi, ed $\alpha = 0.005$ sec^{-1}) determinare in quale istante t_1 la temperatura dell'oggetto è di $T_1 = 20.1$°C.
Rispondere alla stessa domanda supponendo che (per $T_0 \geq 20$°C) la $T(t)$ soddisfi l'equazione differenziale $T'(t) = -\beta(T(t) - 20)^2$, dove $\beta = 0.005$ sec^{-1} °C^{-1}.

20. (11.10.2000). Sapendo che la funzione y soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-3y}{x+2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

determinarne il dominio e calcolare il

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t.$$

21. (14.12.2000). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \operatorname{cotg}(x)y(x) + (x^2+x+1)\sin(2x), \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2. \end{cases}$$

22. (21.2.2001). Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y+2)\cos x \\ y(0) = A \end{cases}$$

quando $A = 0$ e quando $A = -5$.

23. (11.7.2001). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}y(x) + 2x+3, \\ y(0) = -\frac{2}{3}\ln 2 + 1. \end{cases}$$

24. (19.9.2001). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 4xy = e^{-2x^2}\log x \\ y(1) = 5e^{-2} \end{cases}$$

25. (20.2.2002). Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \operatorname{cotg}(x)y(x) + x\sin(2x), \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi + 2 \end{cases}$$

2 Equazioni differenziali del secondo ordine

2.1 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

26. Risolvere le seguenti equazioni differenziali nel dominio indicato a fianco:

$$y'' + 3y' - 10y = 0 \tag{1}$$
$$y'' - 4y' + 4y = 0 \tag{2}$$
$$y'' + y' + y = 0 \tag{3}$$
$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} \quad \text{per } x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\} \tag{4}$$
$$y'' + 4y = \frac{3}{\sin 2x} \quad \text{per } x \notin \left\{k\frac{\pi}{2} \colon k \in \mathbb{Z}\right\} \tag{5}$$
$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2} \quad \text{per } x \neq 0 \tag{6}$$
$$y'' - y' = x \tag{7}$$
$$y'' - 3y' + 2y = \sin x \tag{8}$$
$$y'' - 3y' + 2y = e^x \tag{9}$$
$$y'' + y = \operatorname{tg} x \quad \text{per } x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\} \tag{10}$$

27. Risolvere l'equazione differenziale

$$(1+x^2)y''+(y')^2+1=0.$$

Suggerimento: porre $u=y'$ e risolvere la corrispondente equazione in u (che è a variabili separabili). Poi usare la relazione $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. Questo permette di scrivere la soluzione $u=\operatorname{tg}(c-\operatorname{arctg}x)$, dove $c\in\mathbb{R}$, nella forma $u=\dfrac{D-x}{1+Dx}$, per un'opportuna costante $D\in\mathbb{R}$.

2.2 Problemi di Cauchy del secondo ordine

28. (17.12.1998). Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4y''+4y'+y=xe^{-x} \\ y(0)=4 \\ y'(0)=-3 \end{cases}$$

Si dica se la soluzione trovata è integrabile in senso improprio su $[0,+\infty)$.

29. (22.9.1999). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''-4y=4x^3 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=-2 \end{cases}$$

30. (14.12.2000). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x)-5y'(x)+6y(x)=e^{2x}\sin(2x), \\ y(0)=\frac{1}{10} \\ y'(0)=\frac{3}{10}. \end{cases}$$

31. (6.6.2001). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''+5y'+4y=\sin x \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

3 Algebra Lineare

32. Dire se le seguenti coppie di vettori di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente dipendenti o indipendenti:

$$\begin{array}{lllllll} X_1 & = & (1,2) & X_2 & = & (-2,-4) & (1) \\ X_1 & = & (0,1) & X_2 & = & (1,-5) & (2) \\ X_1 & = & (-1,-1) & X_2 & = & (1,-2) & (3) \end{array}$$

e in ciascun caso determinare $\operatorname{Span}[X_1,X_2]$.

33. Determinare $\mathrm{Span}[X_1,X_2]$ in $\mathbb{R}^3$ se $X_1=(-1,0,2)$, $X_2=(0,1,0)$, e se $X_1=(-1,3,4)$, $X_2=(0,4,-2)$.

34. Calcolare l'inversa, quando è possibile, delle matrici seguenti:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

35. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ le matrici

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sono invertibili, e calcolarne le inverse per qualche valore di λ.

36. Determinare autovalori ed autovettori delle matrici

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$$

dove a, c e d sono numeri reali.

37. Calcolare $\det(A)$ e $\det(B)$, dove A e B sono

$$A=\begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix}$$

ed x, y e z sono arbitrari numeri reali.

38. Calcolare A^2, A^3, B^2, B^3, C^2 e C^3 dove A, B e C sono

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e λ, μ, a, b, c sono numeri reali. Si faccia una congettura sul valore di A^n, B^n e C^n per $n \in \mathbb{N}$ e la si dimostri per induzione.

39. (17.12.1998). Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$ $X_1=(0,-1,2)$ ed $X_2=(-5,3,2)$, si scelga un vettore $Y \in \mathbb{R}^3$ in modo che $\{X_1, X_2, Y\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

40. (17.12.1998). Calcolare il determinante delle matrici

$$A=\begin{bmatrix} a & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & a \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & b & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Si dica se per qualche valore di a la prima matrice è associata ad una rotazione del piano $\mathbb{R}^2$, e in questo caso determinare gli angoli corrispondenti.

41. (17.12.1998). Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$ $X_1 = (1,2,3)$, $X_2 = (a,-4,0)$ e $X_3 = (1,0,b)$, dire per quali valori di a e di b questi risultano essere linearmente indipendenti.

42. (18.3.1999). Determinare autovalori ed autovettori dell'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

43. (21.7.1999). Calcolare autovalori ed autovettori dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

44. (13.10.1999). Determinare autovalori ed autovettori dell'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 2 & -\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

45. (22.2.2000). Determinare autovalori ed autovettori dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

46. (12.7.2000). Determinare i numeri reali a, b in modo che i vettori $X = (1,-1,0)$, $Y = (a,0,2b)$, $Z = (b,-3,1)$ siano:

1. linearmente dipendenti;
2. linearmente indipendenti.

Inoltre dire per quali valori di a, $b \in \mathbb{R}$ i vettori Y, Z e $(1,0,0)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

47. (14.12.2000). Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ i vettori

$$X = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

formano una base di $\mathbb{R}^3$.

48. (14.12.2000). Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4a\sqrt{3} & 4a \\ -4a & 4a\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

rappresenta una rotazione di $\mathbb{R}^2$, e per questi valori determinare l'angolo θ corrispondente. Facoltativo: determinare A^{-1} quando A è una rotazione.

49. $(22.3.2001)$. Determinare gli autovalori dell’applicazione lineare associata alla matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e gli autovettori relativi agli eventuali autovalori reali. Facoltativo: determinare tutti gli autovettori e scrivere la forma a blocchi della matrice.

50. $(19.9.2001)$. Determinare per quali valori del parametro reale a i vettori $X_1 = (1+a, 0, 0)$, $X_2 = (0, -3, -a)$ ed $X_3 = (0, a, 1)$ sono linearmente indipendenti.

51. $(24.4.2002)$. Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{C}$ i vettori

$$X = \begin{bmatrix} a \\ 2a \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.

4 Analisi in piú variabili

4.1 Punti stazionari: punti di massimo, di minimo e di sella

52. Determinare e classificare tutti i punti stazionari delle funzioni

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2 - y^4 && (1)\\
f(x,y) &= 2\log\left(2+x^2+y^2\right) - xy && (2)\\
f(x,y) &= \log\left(2+x^2+y^2\right) - xy && (3)\\
f(x,y,z) &= x^2 - 3xy + 2y^2 - 2xz + z^2 && (4)\\
f(x,y,z) &= 3x^2 - 3xy + 2y^2 - 2xz + z^2 && (5)\\
f(x,y) &= \cos x + \cos y && (6)\\
f(x,y) &= xe^{-x^2-y^2} && (7)\\
f(x,y) &= y^2 - x^3 - x^2 && (8)\\
f(x,y) &= \log\left(x^2+y^2\right) \qquad \text{per } (x,y) \neq (0,0) && (9)\\
f(x,y) &= e^{-x^2-y^2} && (10)
\end{aligned}$$

53. Si studi la funzione $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ passando a coordinate polari.

4.2 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

54. Determinare gli estremi delle funzioni assegnate sui domini indicati:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= -x\log x - y\log y && \text{su } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x\geq 0,\, y\geq 0,\, x+y\leq 1\} && (1)\\
f(x,y) &= x^2y^2 && \text{su } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leq 1\} && (2)\\
f(x,y,z) &= x+3y-z && \text{su } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon z=x^2+y^2 \text{ e } z=2x+4y\} && (3)\\
f(x,y,z) &= x+y+z && \text{su } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon xyz=1\} && (4)\\
f(x,y) &= xy && \text{su } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leq 1\} && (5)\\
f(x,y) &= ax+by && \text{su } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leq 1\},\text{ dove } a^2+b^2\neq 0 && (6)
\end{aligned}$$

Per continuità, nell'esercizio (1) si definisca $[x\log x]_{x=0}=0$.

55. (18.3.1999). Determinare e classificare tutti i punti stazionari della funzione $f\colon D\to\mathbb{R}$ di espressione analitica $f(x,y)=(4x^2+5y^2)e^{-x^2-y^2}$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leq 9\}$.

56. (18.3.1999). Si vuole costruire una tenda la cui forma è un cilindro sormontato da un cono con lo stesso raggio di base ed il cui volume vale $V_0>0$. Si dica quali devono essere le relazioni fra raggio di base R, altezza del cilindro H ed altezza del cono a affinché sia minima la spesa per la tela di cui è fatta la tenda. Suggerimento: dopo aver scritto le relazioni fra le variabili, si prendano $R=1$, $V_0=\frac{1}{3}\pi\sqrt{5}$ e si considerino come variabili solo H ed a.

57. (2.6.1999). Determinare e classificare tutti i punti stazionari della funzione $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ di espressione analitica $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{-x^2}$. Dato poi $R>0$, determinare i punti di massimo e minimo per f ristretta al dominio $D(R)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leq R^2\}$.

58. (21.7.1999). Determinare e classificare tutti i punti stazionari della funzione $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ di espressione analitica $f(x,y)=x^3-3xy^2$. Dato poi $R>0$, determinare i punti di massimo e minimo per f ristretta al dominio $D(R)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leq R^2\}$.

59. (22.9.1999). Studiare la funzione $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ di espressione analitica $f(x,y)=\cos^2 x+\cos^2 y$. Suggerimento: si ricordi che $2\sin x\cos x=\sin(2x)$.

60. (22.9.1999). Determinare i punti dell'insieme $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon y=\frac{1}{2}x^2-2\}$ che hanno distanza minima dall'origine. Suggerimento: calcolare il minimo della distanza al quadrato.

61. (13.10.1999). Studiare la funzione $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da $f(x,y)=(x-3)(y-4)\cdot e^{-x-2y}$. Determinare poi gli estremi di f con il vincolo $(x-3)(y-4)=3$.

62. (22.2.2000). Studiare la funzione $f\colon D\to\mathbb{R}$ definita da $f(x,y)=x^2+3y^2$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon xy\geq 1\}$, determinandone i punti stazionari ed il loro tipo. Come cambia la risposta se si prende come dominio l'insieme $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon xy\leq 1\}$?

63. (19.9.2001). Studiare la funzione $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da $f(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$ determinando e classificando i suoi punti stazionari. Data poi la curva di equazione $f(x,y)=0$ (lemniscata di Bernoulli) determinarne:

1. i punti di massima distanza dall'origine;
2. i punti di massima o minima ascissa;
3. i punti di massima o minima ordinata.

64. (22.3.2001). Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x^3 e^{-x^4-2x^2y^2-y^4}.$$

Determinare poi i valori estremi assunti da f sull'insieme $D(R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq R^2\}$, dove $R \geq 2$. Facoltativo: verificare i risultati ottenuti passando a coordinate polari.

65. (22.3.2001). Si vuole costruire una scatola a forma di parallelepipedo, senza coperchio, usando due materiali diversi e di costo diverso. Fra tutte le scatole di volume $V = 15$ m^3 si determini quella di minore costo, sapendo che

- la parete frontale ed il fondo sono costruite con un materiale del costo di 10.000 L/m^2;
- il resto della scatola è costruito con un materiale del costo di 2.000 L/m^2;
- la scatola deve poter essere collocata all'interno di un container cubico il cui lato misura 6m.

66. (6.6.2001). Si determinino i punti di massima e minima distanza dall'origine della curva di equazione $y^2 = x^3 + 1$, specificando se si tratta di estremi relativi o assoluti. Suggerimento: si consideri il quadrato della distanza.

67. (6.6.2001). Determinare gli estremi della funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y}{x^2 + 2y^2 + 1}$$

68. (11.7.2001). Determinare i punti di massima e quelli di minima distanza dall'origine della superficie di equazione

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1.$$

Per semplicità, si consideri il quadrato della distanza. Facoltativo: classificare anche gli eventuali punti stazionari che non sono estremi assoluti.

69. (10.10.2001). Determinare massimi e minimi della funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = xye^{xy}$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0,\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

70. (10.10.2001). Determinare i punti di massima e quelli di minima quota sulla curva di equazione

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3x + 4y \end{cases}$$

71. (20.2.2002). Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = (y + \sqrt{3})e^{4x^2+y^2}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si determinino gli estremi liberi di f su $\mathbb{R}^2$ e il massimo e minimo assoluto di f ristretta all'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2/4 \leq 1\}$.

72. (24.4.2002). Data la funzione $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y,z) = (z^2+1)(x^2+y^2+z^2-1),$$
se ne determinino i punti stazionari, stabilendone la natura. Si determini quindi il massimo e il minimo di f ristretta all'insieme
$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \le 1\right\}.$$

5 Metodo dei Minimi Quadrati

73. Sulla confezione di un prodotto anticongelante per auto è riprodotta la tabella qui sotto, il cui significato è che il miscuglio di 1 l di questo prodotto ed x l d'acqua congela alla temperatura T. In altre parole, il prodotto puro congela a -44°C, diluito in parti uguali di acqua congela a -30°C, e cosí via.

Diluizione	0	1	2	3	7
Temperatura (°C)	-44	-30	-15	-10	-2

Usando opportune unità di misura, determinare un modello ragionevole ed il relativo coefficiente di correlazione per questi dati. Si osservi che in questo caso un modello lineare $T = ax+b$ è completamente fuori luogo (perché?). Si studino i modelli $T^{-1} = ax+b$ e si spieghi perché anche questo non va bene, ed il modello $\log(-T) = ax+b$, determinandone i relativi coefficienti di correlazione.

74. La tabella che segue riporta il raggio medio dell'orbita R ed il periodo di rivoluzione T dei pianeti del sistema solare (espressi rispettivamente in milioni di chilometri ed in milioni di secondi).

Pianeta	*Me*	*Ve*	*Te*	*Ma*	*Gi*	*Sa*	*Ur*	*Ne*	*Pl*
R	57.9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
T	7.6	19.4	31.6	59.4	374	930	2650	5200	7820

Usando opportune unità di misura, determinare la retta di regressione ed il coefficiente di correlazione per questi dati, e, mediante il cambiamento di variabili adatto, si trovi un modello non lineare del tipo $T = AR^B$. (Si confronti con la terza legge di Keplero).

75. (13.5.1999). La tabella che segue dà la popolazione degli Stati Uniti (in milioni) come risulta da censimenti effettuati negli anni indicati.

Anno	1810	1850	1890	1930	1970
Pop.	7.24	23.2	62.9	122.8	203.2

Usando opportune unità di misura, determinare la retta di regressione ed il coefficiente di correlazione per questi dati, e, mediante un cambiamento di variabili adatto, si trovi un modello non lineare. In entrambi i casi, calcolare i valori previsti dai modelli utilizzati e il numero di abitanti previsto per l'anno 2010. Dire in quale anno gli abitanti supereranno i 300 milioni, utilizzando entrambi i modelli proposti.

76. (22.9.1999). Le tariffe ferroviarie per la seconda classe in vigore nell’estate 1999 sono parzialmente riportate nella tabella che segue:

Distanza (km)	50	100	200	300	500
Costo (L.)	4300	8200	16000	23500	42000

Usando opportune unità di misura, determinare un modello ragionevole ed il relativo coefficiente di correlazione per questi dati. Calcolare il costo previsto dal modello per un viaggio di 1000 km.

77. (22.2.2000). Si vuole studiare la relazione fra concentrazione di ceneri di zolfo nell’atmosfera ed assenze degli addetti nell’industria. La tabella seguente riporta i risultati di un’indagine:

Zolfo in μg/m^3	14	26	28	34	40
Assenti per 1000 dipendenti	38	88	106	122	176

Determinare un modello ragionevole ed il relativo coefficiente di correlazione per questi dati. Calcolare il numero di assenti previsto dal modello quando la quantità di ceneri di zolfo nell’atmosfera è di 30μg/m^3.

78. (29.5.2001). La tabella che segue dà il numero degli studenti universitari (in migliaia) di sesso maschile iscritti negli anni indicati.

Anno	1981	1984	1987	1990	1993
Stud.	565	588	592	687	773

Usando opportune unità di misura, determinare la retta di regressione ed il coefficiente di correlazione per questi dati, e, mediante un cambiamento di variabili adatto, si trovi un modello non lineare. In entrambi i casi, calcolare i valori previsti dai modelli utilizzati e il numero di iscritti previsto per l’anno 2002.

79. (11.7.2001). La tabella che segue riporta gli indici di produzione industriale in Italia relativi agli anni indicati.

Anno	1938	1948	1953	1958	1963
Indice	100	102	163	232	393

Usando opportune unità di misura, determinare la retta di regressione ed il coefficiente di correlazione per questi dati, e, mediante un cambiamento di variabili adatto, si trovi un modello non lineare. In entrambi i casi, calcolare i valori previsti dai modelli utilizzati e l’indice previsto per l’anno 1968.

80. (10.10.2001). La tabella seguente riporta i dati dell’A. C. I. relativi al numero di automobili circolanti in Italia negli anni indicati.

Anno	1931	1951	1961	1971	1981
Automobili	186000	425000	2449000	11294000	18603000

Usando opportune unità di misura, determinare la retta di regressione ed il coefficiente di correlazione per questi dati, e, mediante un cambiamento di variabili adatto, si trovi un modello non lineare. In entrambi i casi, calcolare i valori previsti dai modelli utilizzati ed il numero di auto circolanti previsto per gli anni 1991 e 2001.

81. (20.2.2002). Il tempo di esecuzione di un algoritmo dipende dalla grandezza n dell'input. La tabella seguente riporta i tempi di esecuzione in secondi di un certo algoritmo per alcuni valori possibili di n.

n	10	20	30	40	50
tempo	2	22	108	334	813

Usando opportune unità di misura, determinare la retta di regressione ed il coefficiente di correlazione per questi dati, e, mediante un cambiamento di variabili adatto, si trovi un modello non lineare. In entrambi i casi, calcolare i valori previsti dai modelli utilizzati ed il tempo di esecuzione previsto quando n vale 70.

Avvertenza: queste soluzioni sono distribuite cosí come sono. Il docente non assume ALCUNA responsabilità né sulla completezza né sulla correttezza dei risultati.

---

6 Soluzioni

1. Qui A è un arbitrario numero reale

$$\begin{aligned} y &= x+1+Ae^x && (1)\\ y &= e^{x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + A\right) && (2)\\ y &= \frac{x+1}{x}\left(\tfrac{1}{2}x^2-3x+3\log|x+1|+A\right) && (3)\\ y &= \cos x\,(\log|\operatorname{tg} x|+A) && (4) \end{aligned}$$

2. Qui A indica un arbitrario numero reale

$$\begin{aligned} y &= \frac{-2}{A+x^2} && \text{oppure } y = 0 && (1)\\ y-\log|1+y| &= \tfrac{1}{2}x^2+A && \text{oppure } y = -1 && (2)\\ x-y-\log|1+x-y| &= x+A && \text{oppure } y = x+1 && (3)\\ y &= A\sqrt{x^2+1}-1 && \text{oppure } y = -1 && (4) \end{aligned}$$

3. Qui A indica un arbitrario numero reale.

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} &= \tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)+A && && (1)\\ y &= 2x+A(y+x)x^3 && \text{oppure } y=-x && (2)\\ y &= xe^{1+Ax} && \text{oppure } y=ex && (3) \end{aligned}$$

4. (1) $y(x)=x+1+\big(y(0)-1\big)e^x$; (2) $y(x)=\dfrac{y(0)e^{4x}}{1-y(0)+y(0)e^{4x}}$; (3) $y(x)=y(0)e^{x^2}$.

5. (1) $y=Ae^{\lambda x}$, (2) $y=e^{\operatorname{tg}(x/2)}$, (3) $y=x^3+3x+1$.

6. $y(x)=2\operatorname{tg}\left(2e^x+\dfrac{\pi}{4}-2\right)$.

7. Si tratta di un'equazione logistica: $C(t)=3e^t/(7+3e^t)$, e quindi il limite cercato è 1.

8. Si tratta di una verifica immediata.

9. Esiste una soluzione per ogni $a\neq 4$. Inoltre, se $a>4$ la soluzione è $y(x)=4+\sqrt{2x+(a-4)^2}$, mentre se $a<4$ la soluzione è $y(x)=4-\sqrt{2x+(a-4)^2}$.

10. Si ha $c=\nu/\lambda$. Inoltre la soluzione generale dell'equazione differenziale è $N(t)=Ae^{-\lambda t}+c$, da cui si ricava immediatamente che il limite cercato vale c, poiché per ipotesi λ e ν sono positivi. Se $\lambda=0$ l'equazione differenziale ha la soluzione generale $N(t)=\nu t+A$, e quindi il limite cercato vale $+\infty$.

11. Le primitive cercate sono $\log|x/(1-x)|+c$, dove $c\in\mathbb{R}$. Sfruttando questo risultato si ottiene $A(t)=Se^{\alpha St}/(99+e^{\alpha St})$. Quindi $t_0=(\log 99)/(\alpha_0 S)$, mentre $t_1=(2\log 99)/(\alpha_0 S)$.

12. $y(t)=AB\dfrac{1-e^{-(B-A)rt}}{B-Ae^{-(B-A)rt}}$ ed il limite vale A. Se invece $A=B$ allora $y(t)=\dfrac{A^2rt}{Art+1}$ ed il limite vale ancora A.

13. Si ha la soluzione singolare $y=1$ per $a=1$. Per $a\neq 1$, $a>0$ la soluzione è $y(x)=\exp\big((\log a)e^{x^2}\big)$.

14. La soluzione generale dell'equazione differenziale è $y(x)=e^{\sin x}\big(x\log x-x+k\big)$ e la condizione iniziale dà $k=-\pi\log\pi+\pi$.

15. La soluzione generale è $y(x)=\pm\sqrt{c+\sin^2 x}$, da cui $y(x)=\sqrt{1+\sin^2 x}$, tenendo conto della condizione iniziale.

16. $y(x)=\frac{2}{5}e^x-\frac{1}{5}\big(\sin^2 x+2\sin x\cos x+2\big)$.

17. $y(x)=3$ se $y_0=3$, altrimenti $y(x)=3+(y_0-3)e^{x^2-x}$.

18. $C(t)=\big(1+19e^{-\alpha t}\big)^{-1}$; $C(100)\approx 0.731059$.

19. Nel primo caso $T(t)=20+(T_0-20)e^{-\alpha t}$ e quindi $t_1=\alpha^{-1}\log\big((T_0-20)/(T_1-20)\big)=200\log 100\approx 921$ secondi. Nel secondo caso $T(t)=20+(T_0-20)\big(\beta(T_0-20)t+1\big)^{-1}$ e quindi $t_1=\beta^{-1}\big((T_1-20)^{-1}-(T_0-20)^{-1}\big)=1980$ secondi.

20. Si ha $y(x)=8(x+2)^{-3}$, e quindi il dominio di y è $(-2,+\infty)$ ed il limite vale 1.

21. $y(x)=\sin(x)\big[-\frac{1}{2}(\pi^2+2\pi)+2(x^2+x-1)\sin(x)+2(2x+1)\cos(x)\big]$.

22. La soluzione generale è $y=Ce^{\sin x}-2$ e C vale rispettivamente 2 e -3.

23. $y(x)=(2-x-x^2)\big[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ln(x+2)-\frac{5}{3}\ln(1-x)\big]$.

24. La soluzione generale è $y(x)=e^{-2x^2}\big(x\log x-x+A\big)$, da cui $A=6$.

25. $y(x) = \sin(x)\bigl[2 + 2x\sin(x) + 2\cos(x)\bigr]$.

26. Qui A e B sono arbitrari numeri reali

$$
\begin{aligned}
y &= Ae^{2x} + Be^{-5x} && (1)\\
y &= (Ax+B)e^{2x} && (2)\\
y &= e^{-x/2}\Bigl(A\sin\bigl(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\bigr) + B\cos\bigl(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\bigr)\Bigr) && (3)\\
y &= (x+A)\sin x + (\log|\cos x| + B)\cos x && (4)\\
y &= \bigl(A + \tfrac{3}{4}\log|\sin(2x)|\bigr)\sin(2x) + \bigl(B - \tfrac{3}{2}x\bigr)\cos(2x) && (5)\\
y &= (Ax + B - \log|x|)e^{-2x} && (6)\\
y &= Ae^{x} - \tfrac{1}{2}x^2 - x + B && (7)\\
y &= Ae^{2x} + Be^{x} + \tfrac{1}{10}\sin x + \tfrac{3}{10}\cos x && (8)\\
y &= Ae^{2x} + (B-x)e^{x} && (9)\\
y &= A\sin x + \cos x\left(B - \log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|\right) && (10)
\end{aligned}
$$

27. $y = (A^2+1)\log|A+x| - Ax + B$, dove A, $B \in \mathbb{R}$.

28. $y = e^{-x}(x+4)$. Sí.

29. La soluzione generale dell'equazione differenziale è $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} - x^3 - \frac{3}{2}x$. La soluzione del problema di Cauchy è quella con $A = -\frac{1}{8}$, $B = \frac{1}{8}$.

30. $y(x) = e^{2x}\bigl(\frac{1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{5}\sin(2x) - \frac{1}{2}\bigr) + \frac{1}{2}e^{3x}$.

31. $y(x) = Ae^{-x} + Be^{-4x} + \frac{3}{34}\sin x - \frac{5}{34}\cos x$.

32. (1) i vettori sono linearmente dipendenti poiché $X_2 = -2X_1$; quindi $\text{Span}[X_1, X_2] = \text{Span}[X_1] = \{\lambda X_1 \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$. (2), (3) i vettori sono linearmente indipendenti e quindi $\text{Span}[X_1, X_2] = \mathbb{R}^2$.

33. In entrambi i casi X_1 ed X_2 sono linearmente indipendenti e quindi $\text{Span}[X_1, X_2] = \{\lambda X_1 + \mu X_2 \colon \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Nel primo caso questo è $\{(-\lambda, \mu, 2\lambda) \in \mathbb{R}^3 \colon \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, nel secondo $\{(-\lambda, 3\lambda + 4\mu, 4\lambda - 2\mu) \in \mathbb{R}^3 \colon \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

34. Solo le prime due matrici sono invertibili, e le loro inverse sono

$$
\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

35. Si ricava subito $\det(A) = 2\lambda - 5$ e quindi A è invertibile se e solo se $\lambda \neq \frac{5}{2}$. Invece $\det(B) = 1$ qualunque sia λ. Quindi le matrici inverse A^{-1} e B^{-1} sono

$$
A^{-1} = \frac{1}{2\lambda - 5}\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 4-2\lambda \\ -5 & 2 & 2 \\ \lambda & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

36. Abbiamo $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^3$ e quindi c'è il solo autovalore (con molteplicità 3) $\lambda = 1$. A questo autovalore corrisponde l'autovettore $v_1 = (1,0,0)$. Poi abbiamo $\det(B - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$

e quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$, con gli autovettori corrispondenti $v_1 = (-3, 1)$ e $v_2 = (2, 1)$. Infine $\det(C - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda)$ con gli autovalori $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = d$. Se $a \neq d$ questi sono distinti e gli autovettori corrispondenti sono $v_1 = (a - d, c)$ e $v_2 = (0, 1)$. Se invece $a = d \neq 0$ e $c \neq 0$ allora c'è il solo autovettore $v_1 = (0, 1)$, mentre se $c = 0$ possiamo prendere come autovettori due qualunque vettori linearmente indipendenti. Se $a = d = 0$ e $c \neq 0$ c'è l'autovettore $v_1 = (0, 1)$, e se $a = c = d = 0$ allora la matrice è nulla, e tutti i vettori del piano sono autovettori.

37. Si ha $\det(A) = y - x$, $\det(B) = (y - x)(z - x)(z - y)$.

38. Si ha

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{bmatrix} \qquad C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2a & 2b + ac \\ 0 & 1 & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^3 = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 0 & \mu^3 \end{bmatrix} \qquad C^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3a & 3b + 3ac \\ 0 & 1 & 3c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inoltre, in generale

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{bmatrix} \qquad C^n = \begin{bmatrix} 1 & na & nb + \frac{n(n-1)}{2}ac \\ 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

39. Ci sono infinite soluzioni: è sufficiente che Y sia linearmente indipendente da $\{X_1, X_2\}$. Per esempio, possiamo scegliere $Y = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$.

40. $\det(A) = a^2 + \frac{3}{4}$; $\det(B) = 5a + 2$. Si hanno rotazioni per $a = \frac{1}{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, oppure $a = -\frac{1}{2}$ e $\theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

41. $ab + 2b - 6 \neq 0$.

42. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$, $v_1 = [1, -2]$, $v_2 = [2, 1]$.

43. Si ha $\det(A - \lambda I) = \lambda(2 - \lambda)(\lambda - 4)$ e quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 4$ con autovettori relativi $v_1 = (1, 0, 3)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, -1)$.

44. Autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{6}$ con autovettori $v_1 = (\sqrt{3}, \sqrt{2})$ e $v_2 = (1, -\sqrt{2})$.

45. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 1 - \sqrt{3}$, con autovettori proporzionali a $v_1 = (0, 0, 1)$, $v_2 = \left(-3 + \sqrt{3}, 2, 0\right)$, $v_3 = \left(-3 - \sqrt{3}, 2, 0\right)$.

46. 1. $a - 2b^2 + 6b = 0$; 2. $a - 2b^2 + 6b \neq 0$; $b \neq 0$.

47. Per $a \notin \{\pm\sqrt{2}\}$.

48. Per $a = \frac{1}{8}$ si ha $\theta = -\frac{1}{6}\pi$; per $a = -\frac{1}{8}$ si ha $\theta = \frac{5}{6}\pi$.

49. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3 + 4i$, $\lambda_3 = 3 - 4i$, con autovettori relativi proporzionali a $v_1 = [0, 1, 0]$, $v_2 = [1, 0, -i]$, $v_3 = [1, 0, i]$.

50. Il determinante della matrice costituita dai tre vettori, presi nell'ordine, vale $(1+a)(a^2-3)$; dunque i vettori dati sono linearmente indipendenti se e solo se $a \notin \{-\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}\}$.

51. Il determinante della matrice formata dai tre vettori vale $a^2 - 2a$, e quindi i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se $a \notin \{0, 2\}$.

52.

1. $\nabla f = \underline{0}$ se e solo se $(x,y) = \underline{0}$, $H_f(\underline{0}) = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, che ha gli autovalori 0 e 2. Il punto è di sella perché $f(x,y) = (x-y^2)(x+y^2)$, $f(0,0) = 0$ ed f assume valori di segno discorde in ogni intorno dell'origine.

2. si ha $\nabla f = \underline{0}$ se e solo se $(x,y) = \underline{0}$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. Inoltre $H_f(\underline{0})$ ha gli autovalori 1 e 3, e quindi il punto è di minimo relativo, mentre negli altri due punti H_f ha gli autovalori -1 e 2, ed essi sono di sella.

3. $\nabla f = \underline{0}$ se e solo se $(x,y) = \underline{0}$, ed H_f ha gli autovalori 0 e 2. Per poter concludere che $\underline{0}$ è di sella, si può osservare che $f(x,x)$ ha un massimo per $x = 0$ mentre $f(x,-x)$ ha un punto di minimo in $x = 0$.

4. l'unico punto stazionario è $\underline{0}$ ed in questo punto $\det(H_f - \lambda I) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 7\lambda - 18$ e quindi H_f ha autovalori discordi.

5. l'unico punto stazionario è $\underline{0}$ ed in questo punto $\det(H_f - \lambda I) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 31\lambda + 14$, H_f ha autovalori positivi e quindi $\underline{0}$ è un punto di minimo.

6. $\nabla f = \underline{0}$ se e solo se $(x,y) = (k\pi, j\pi)$ per k, $j \in \mathbb{Z}$. Guardando alla matrice hessiana, si conclude che questi sono punti di massimo se k e j sono entrambi pari, di minimo se entrambi dispari e di sella in caso contrario.

7. $\nabla f = \underline{0}$ se e solo se $(1-2x^2, xy) = \underline{0}$, e quindi ci sono due punti stazionari $\left(\pm 2^{-1/2}, 0\right)$. Il punto $\left(2^{-1/2}, 0\right)$ è di massimo, l'altro di minimo.

8. $\nabla f = \underline{0}$ se e solo se $(x,y) = \underline{0}$ oppure $(x,y) = \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$. Il punto $\underline{0}$ è di sella, l'altro è un punto di minimo.

9. f non ha punti stazionari.

10. $\nabla f = \underline{0}$ se e solo se $(x,y) = \underline{0}$, che è un punto di massimo.

53. Qui $\widetilde{f}(\rho,\theta) = \rho^2 + 1 - 2\rho\sin\theta$ e quindi $\nabla\widetilde{f} = (2\rho - 2\sin\theta, -2\rho\cos\theta) = \underline{0}$ se e solo se $(\rho,\theta) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, come si può vedere facilmente.

54.

1. La funzione è non negativa, ed $f(x,0) = f(0,y) = 0$. Inoltre l'unico punto stazionario interno è $\left(1/e, 1/e\right)$ dove f vale $2/e$ ed è di massimo relativo. Sul vincolo $x+y = 1$ c'è un solo punto stazionario $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nel quale f vale $\log 2$.

2. f è non negativa e si annulla se e solo se $x = 0$ oppure $y = 0$. Se $xy \neq 0$ si trova $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$ e quindi $f = \frac{1}{4}$, che è un massimo.
3. I punti stazionari vincolati sono $(x,y,z) = \left(1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{10}, 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{10}, 10 \pm 3\sqrt{10}\right)$, dove $f = -3 \mp \sqrt{10}$.
4. Moltiplicando le tre equazioni che provengono da $\nabla f = \lambda \nabla g$ si trova $1 = \lambda^3 (xyz)^2 = \lambda^3$ che ha la sola soluzione reale $\lambda = 1$, ed inoltre x, y e z sono tutti $\neq 0$. Quindi si ricava $x = y = z$, da cui $x = y = z = 1$ ed $f = 3$.
5. I punti di massimo sono $(x,y) = \left(\pm 2^{-1/2}, \pm 2^{-1/2}\right)$, mentre quelli di minimo sono $(x,y) = \left(\pm 2^{-1/2}, \mp 2^{-1/2}\right)$.
6. L'unico punto di massimo è $(x,y) = \left(a/\sqrt{a^2+b^2}, b/\sqrt{a^2+b^2}\right)$; l'unico punto di minimo è $(x,y) = \left(-a/\sqrt{a^2+b^2}, -b/\sqrt{a^2+b^2}\right)$.

55. Punti stazionari: $(0,0)$, $(0,\pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, $(0,\pm 3)$, $(\pm 3, 0)$. Minimo assoluto, massimi assoluti (2), massimi relativi (2), selle (4).

56. $a = 2/\sqrt{5}$, $H = 1/\sqrt{5}$.

57. Si ha $\nabla f = \underline{0}$ se e solo se $(x,y) = \underline{0}$, $(\pm 1, 0)$. Inoltre $H_f(0,0) = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right]$ con autovalori discordi, mentre $H_f(\pm 1, 0) = \left[\begin{smallmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right]$ con autovalori negativi. Dunque $\underline{0}$ è un punto di sella, mentre $(\pm 1, 0)$ sono punti di massimo. Il sistema da risolvere per il problema con vincolo è

$$\begin{cases} 2x(1 - x^2 - y^2)e^{-x^2} = 2\lambda x \\ -2ye^{-x^2} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad y = 0 \vee \lambda = -e^{-x^2}.$$

Nel primo caso si ha $x = \pm R$ ed $f(\pm R, 0) = R^2 e^{-R^2}$; nel secondo caso si ha $x = 0$ (da cui $y = \pm R$ ed $f(0, \pm R) = -R^2$) oppure $1 - x^2 + y^2 = -1$, da cui si ricava facilmente $x^2 = \frac{1}{2}R^2 + 1$, $y^2 = \frac{1}{2}R^2 - 1$ (purché $R \geq \sqrt{2}$): nei quattro punti risultanti f vale $2\exp\left(-1 - \frac{1}{2}R^2\right)$.

58. $(0,0)$ è l'unico punto stazionario ed è un punto di sella. Sul bordo i punti stazionari sono $\left(\pm R, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}R, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}R\right)$, $\left(-\frac{1}{2}R, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}R\right)$; in tre di questi f vale R^3 e sono punti di massimo; gli altri sono punti di minimo.

59. Si ha $\nabla f = (-2\sin x \cos x, -2\sin y \cos y) = (-\sin(2x), -\sin(2y)) = (0,0)$ se e solo se esistono k, $j \in \mathbb{Z}$ tali che $(x,y) = \left(\frac{1}{2}\pi k, \frac{1}{2}\pi j\right)$. Inoltre $H_f(x,y) = \left[\begin{smallmatrix} -2\cos(2x) & 0 \\ 0 & -2\cos(2y) \end{smallmatrix}\right]$, e quindi i punti stazionari in cui k e j sono entrambi pari sono punti di massimo, dove f vale 2, quelli in cui k e j sono entrambi dispari sono di minimo, dove f vale 0, e gli altri sono punti di sella.

60. La funzione da minimizzare è $f(x,y) = x^2 + y^2$ con il vincolo $g(x,y) = y - \frac{1}{2}x^2 + 2 = 0$. Il sistema $g = 0$, $\nabla f = \lambda \nabla g$ ha le soluzioni $(x,y) = (0,-2)$ ed $(x,y) = \left(\pm\sqrt{2}, -1\right)$, dove la funzione f vale 4 e 3 rispettivamente.

61. $\nabla f = \left((4-x)(y-4)e^{-x-2y}, (x-3)(9-2y)e^{-x-2y}\right) = (0,0)$ se e solo se $(x,y) = (3,4)$ oppure $(x,y) = \left(4, \frac{9}{2}\right)$. Inoltre $f_{xx} = (x-5)(y-4)e^{-x-2y}$, $f_{xy} = (4-x)(9-2y)e^{-x-2y}$ e $f_{yy} = (x-3)(4y-$

$20)e^{-x-2y}$. Quindi $(3,4)$ è un punto di sella, mentre $\left(4,\frac{9}{2}\right)$ è un punto di minimo. Il sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$ ha le due sole soluzioni $(x,y) = \left(3 \pm \sqrt{6}, 4 \pm \sqrt{3/2}\right)$.

62. Nel primo caso non ci sono punti stazionari interni a D. Sul bordo di D ci sono due minimi di coordinate $\left(\pm 3^{1/4}, \pm 3^{-1/4}\right)$. Nel secondo caso c'è un minimo assoluto in $(0,0)$.

63.

1. Prendendo il quadrato della distanza, si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x = 4\lambda x(x^2+y^2-1) \\ 2y = 4\lambda y(x^2+y^2+1) \\ (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0 \end{cases}$$

Si vede subito che $x = 0$ implica $y = 0$, che $y = 0$ implica $x = 0$ oppure $x = \pm\sqrt{2}$ e che $xy \neq 0$ implica $x^2+y^2-1 = x^2+y^2+1$, assurdo.

2. Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} 1 = 4\lambda x(x^2+y^2-1) \\ 0 = 4\lambda y(x^2+y^2+1) \\ (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione implica $\lambda \neq 0$ e quindi la seconda dà $y = 0$, da cui $x = 0$ oppure $x = \pm\sqrt{2}$.

3. Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} 0 = 4\lambda x(x^2+y^2-1) \\ 1 = 4\lambda y(x^2+y^2+1) \\ (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione implica $\lambda \neq 0$, e quindi la prima dà $x = 0$ (da cui $y = 0$) oppure $x^2+y^2 = 1$. Questa equazione, messa a sistema con l'equazione della lemniscata, dà i quattro punti $(x,y) = \left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$, $(x,y) = \left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$.

64. Si ha $\nabla f = \left((3-4x^2y^2-4x^4)x^2 e^{-x^4-2x^2y^2-y^4}, (-4x^2y-4y^3)x^3 e^{-x^4-2x^2y^2-y^4}\right)$, e quindi $\nabla f = \underline{0}$ quando $x = 0$ (e per qualsiasi valore di y) oppure nelle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3-4x^2y^2-4x^4 = 0 \\ -4x^2y-4y^3 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 3-4x^2y^2-4x^4 = 0 \\ y(x^2+y^2) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $y = 0$ oppure $(x,y) = \underline{0}$. Nel primo caso abbiamo $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt[4]{12}$. — Completare — Nei punti in cui $x = 0$ la funzione vale 0: poiché f è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$, questi sono tutti punti di sella.

65. —

66. Si tratta di massimizzare la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ soggetta al vincolo $g(x,y) = y^2 - x^3 - 1 = 0$; cerchiamo gli estremi liberi per la funzione $H(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(y^2 - x^3 - 1)$. Dato che $\nabla H = (2x + 3\lambda x^2, 2y - 2\lambda y, -y^2 + x^3 + 1)$ si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3\lambda x^2 = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ -y^2 + x^3 + 1 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \vee \lambda x = -\frac{2}{3} \\ y = 0 \vee \lambda = 1 \\ y^2 = x^3 + 1 \end{cases}$$

Se $x = 0$ allora $y = \pm 1$ ed $f(0, \pm 1) = 1$; se $y = 0$ allora $x = -1$ ed $f(-1, 0) = 1$. Se $xy \neq 0$, la prima equazione dà $x = -\frac{2}{3}$ e sostituendo nella terza ricaviamo $y^2 = 19/27$. Nei due punti corrispondenti, f vale $31/27$.

67. —

68. Si vuole rendere estrema la funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ soggetta al vincolo $g(x,y,z) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 + z^2 - 1 = 0$. Dunque si devono cercare gli estremi liberi per la funzione $H(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$. L'equazione $\nabla H = \vec{0}$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{2}\lambda x = 0 \\ 2y - \frac{2}{9}\lambda y = 0 \\ 2z - 2\lambda z = 0 \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

La terza equazione implica $\lambda = 1$ (da cui $x = y = 0$ e quindi $z = \pm 1$) oppure $z = 0$. In questo caso la seconda equazione implica $\lambda = 9$ (da cui $x = 0$ e quindi $y = \pm 3$) oppure $y = 0$ da cui $x = \pm 2$. I primi due sono punti di minimo, i secondi due sono punti di massimo, e gli ultimi sono punti stazionari che non sono estremi.

69. —

70. Si tratta di rendere massima o minima la funzione $f(x,y,z) = z$ con i due vincoli $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ e $h(x,y,z) = z - 3x - 4y = 0$. Si cerchino dunque gli estremi liberi per la funzione $H(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) - \mu h(x,y,z)$. L'equazione $\nabla H = \vec{0}$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} -2\lambda x + 3\mu = 0 \\ -2\lambda y + 4\mu = 0 \\ 1 - \mu = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 3x + 4y = z \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \mu = 1 \\ 2\lambda x = 3 \\ 2\lambda y = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 3x + 4y = z \end{cases} \quad \text{da cui } \lambda \neq 0 \text{ e} \quad \begin{cases} \mu = 1 \\ x = 3/(2\lambda) \\ y = 4/(2\lambda) \\ 4\lambda^2 = 25 \\ 3x + 4y = z \end{cases}$$

Quindi le soluzioni sono $(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 5\right)$, $(x_2, y_2, z_2) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -5\right)$.

71. La funzione ha 2 punti stazionari $A = (0, \frac{1-\sqrt{3}}{2})$ e $B = (0, \frac{-1-\sqrt{3}}{2})$. Il primo è un minimo mentre il secondo è una sella. Per quanto riguarda lo studio di f ristretta a D si osserva che entrambi i punti sono punti interni a D. Inoltre sul bordo di D si ha $e^{4x^2+y^2} \equiv e^4$. Basta quindi studiare la funzione $(x,y) \mapsto (y+\sqrt{3})$. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -\lambda x = 0, \\ 1 - \frac{1}{2}\lambda y = 0, \\ x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1. \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo $x = 0$ o $\lambda = 0$. Ma $\lambda = 0$ non soddisfa la seconda equazione. Pertanto i punti stazionari vincolati sono $C = (0,-2)$ e $D = (0,2)$.

72. Il sistema dei punti stazionari è

$$\begin{cases} 2x(z^2+1) = 0, \\ 2y(z^2+1) = 0, \\ 2z(x^2+y^2+2z^2) = 0, \end{cases}$$

che ammette come unica soluzione il punto $O = (0,0,0)$ che risulta essere il minimo assoluto di f. Lo studio dei punti stazionari vincolati a $x^2/4 + y^2/9 + z^2 = 1$ porta alla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x(z^2+1) - \frac{1}{2}\lambda x = 0, \\ y(z^2+1) - \frac{1}{9}\lambda y = 0, \\ z(x^2+y^2+2z^2) - \lambda z = 0, \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$$

che ammette le soluzioni $(\pm 2,0,0)$, $(0,\pm 3,0)$, $(0,0,\pm 1)$. Non esistono altre soluzioni in quanto se $xy \neq 0$, dividendo, rispettivamente per x, y e le prime 2 equazioni si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2(z^2+1) - \frac{1}{2}\lambda = 0, \\ (z^2+1) - \frac{1}{9}\lambda = 0, \\ z(x^2+y^2+2z^2) - \lambda z = 0, \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Confrontando le prime due equazioni si ottiene $\lambda = 0$ che sostituito nella terza equazione dà $z = 0$. Analogamente se $yz \neq 0$ e $x = 0$, abbiamo il sistema

$$\begin{cases} (z^2+1) - \frac{\lambda}{9} = 0, \\ (y^2+2z^2) - \lambda = 0, \\ \frac{y^2}{9} + z^2 = 1. \end{cases}$$

Confrontando le prime due equazioni otteniamo $y^2 - 7z^2 = 9$ che confrontata con la terza, dà $z = 0$. Infine se $xz \neq 0$ e $y = 0$, dividendo la prima e terza equazione rispettivamente per x e z si ottiene

$$\begin{cases} 2(z^2+1) - \frac{\lambda}{2} = 0, \\ (x^2+2z^2) - \lambda = 0, \\ \frac{x^2}{4} + z^2 = 1. \end{cases}$$

Confrontando le prime 2 equazioni otteniamo $2z^2+4-x^2=0$ che, confrontata con la terza, dà $z=0$. Il massimo di f su A è realizzato in $(0,\pm 3,0)$ e vale 8, mentre il minimo é nel punto $(0,0,0)$ e vale -1.

73. Il modello lineare $T=ax+b$ prevede che per $x\to+\infty$ la temperatura di congelamento tenda a $+\infty$, mentre deve necessariamente tendere a 0 restando negativa. Il modello $T^{-1}=ax+b$ dà

$$a=-0.0714923205, \qquad b=0.0413345787, \qquad r=-0.9609996536,$$

ma non va bene perché “prevede” una temperatura di congelamento positiva per il prodotto puro. Il modello $\log(-T)=ax+b$ dà

$$a=-0.4429711420, \qquad b=3.7295588674, \qquad r=-0.9958150835.$$

74. Usare le unità indicate. Modello lineare $T=aR+b$ con

$$a=1.2890531142, \qquad b=-395.6755655833, \qquad r=0.9887294930,$$

ma si osservi che questo modello prevede per Mercurio, Venere, Terra e Marte un periodo negativo! Modello non lineare $\log T=a\log R+b$ con

$$a=1.4997654908, \qquad b=-4.0591410481, \qquad r=0.9999998222.$$

75. Unità di misura $x=(A-1810)/40$, dove A è l’anno dato nella tabella. Modello lineare: $a=49.152$, $b=-14.436$, $r=0.9687$. Modello non lineare: $a=0.8336$, $b=2.2109$, $r=0.9862$.

76. Con il modello lineare $y=ax+b$ si ottiene

$$a=83.3203125, \qquad b=-363.671875, \qquad r=0.9987818603.$$

Inoltre $sx=160$, $sy=13347.50913$. Il viaggio di 1000 km costa dunque 82956.64 L.

77. Con il modello lineare $y=ax+b$ si ottiene

$$a=5.0738396624, \qquad b=-38.0970464135, \qquad r=0.9829337214,$$

$sx=8.70862$, $sy=44.95331$; previsti 114 assenti. Con il modello lineare fra x e $\log y$ si ha

$$a=0.0577212751, \qquad b=2.9112892101, \qquad r=0.9857562499,$$

$sx=8.70862$, $sy=0.50994$; previsti 104 assenti.

78. —

79. —

80. —

81. Modello lineare $t=an+b$:

$$\begin{array}{rcl rcl}
\bar{x} & = & 30.00 & \bar{y} & = & 255.80\\
\overline{x^2} & = & 1100.00 & \overline{y^2} & = & 15935.40\\
\overline{xy} & = & 1152.00 & & &
\end{array}$$

$a = 19.34$, $b = -324.4$, $r = 0.9042$. Modello esponenziale $\log t = an + b$:

$$\begin{array}{llll} \overline{x} & = 30.000 & \overline{y} & = 4.196 \\ \overline{x^2} & = 1100.000 & \overline{y^2} & = 22.125 \\ \overline{xy} & = 155.340 & & \end{array}$$

$a = 0.14735$, $b = -0.22494$, $r = 0.97997$.