ESERCIZI PER IL CORSO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA II

Alessandro Zaccagnini

2.8.2002

Equazioni differenziali

1. Lineari del primo ordine.

$$y' = y - x \tag{1}$$

$$y' - 2xy = 1 \tag{2}$$

$$y' + \frac{y}{x + x^2} = x - 2 \qquad \text{per } x \in (-1, 0) \tag{3}$$

$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sin x} \qquad \text{per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \tag{4}$$

2. Lineari del secondo ordine.

$$y'' + 3y' - 10y = 0 \tag{1}$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \tag{2}$$

$$y'' + y' + y = 0 \tag{3}$$

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{per } x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\} \tag{4}$$

$$y'' + 4y = \frac{3}{\sin 2x} \qquad \text{per } x \notin \left\{k\frac{\pi}{2} \colon k \in \mathbb{Z}\right\} \tag{5}$$

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2} \qquad \text{per } x \neq 0 \tag{6}$$

$$y'' - y' = x \tag{7}$$

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x \tag{8}$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \tag{9}$$

$$y'' + y = \operatorname{tg} x \qquad \text{per } x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\} \tag{10}$$

3. A variabili separabili. Fare attenzione alle eventuali soluzioni stazionarie.

$$y' = xy^2 \tag{1}$$

$$y' = x\left(1 + \frac{1}{y}\right) \qquad \text{per } y \neq 0 \tag{2}$$

$$y' = \frac{1}{y - x} \qquad \text{per } y \neq x \tag{3}$$

$$y' = (y + 1)\frac{x}{x^2 + 1} \tag{4}$$

Suggerimento: nella (3) porre $u = y - x$.

4. NON LINEARI DEL SECONDO ORDINE. Risolvere l'equazione

$$(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$$

Suggerimento: porre $u = y'$ e risolvere la corrispondente equazione in u (che è a variabili separabili). Poi usare la relazione $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$. Questo permette di scrivere la soluzione $u = \operatorname{tg}(c - \operatorname{arc\,tg} x)$, dove $c \in \mathbb{R}$, nella forma $u = \dfrac{D - x}{1 + Dx}$, per un'opportuna costante $D \in \mathbb{R}$.

5. OMOGENEE. Porre $v = \dfrac{y}{x}$.

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \qquad \text{per } y \neq x \tag{1}$$

$$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2 \qquad \text{per } x \neq 0 \tag{2}$$

$$y' = \frac{y}{x} \log \frac{y}{x} \qquad \text{per } x,\, y > 0 \tag{3}$$

Suggerimento: nella (3) porre $v = e^t$ per determinare una delle primitive necessarie.

6. STUDIO QUALITATIVO. Studiare qualitativamente le seguenti equazioni differenziali

$$y' = y - x \tag{1}$$

$$y' = 4y(1-y) \tag{2}$$

$$y' = 2xy \tag{3}$$

Se possibile, determinare esplicitamente le soluzioni.

7. PROBLEMA DI CAUCHY. Risolvere i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = A \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} y' \sin x = y \log y \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y''(x^2+1) = 2xy' \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \quad (3)$$

Suggerimento: nel problema (3) porre $u = y'$ e risolvere prima l'equazione differenziale risultante in u (che è del primo ordine).

8. (22.5.1996). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (4 + y^2)e^x \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Suggerimento: si scelga una sostituzione del tipo $y = au$, per un opportuno valore di $a > 0$.

9. (22.5.1996). Durante una reazione chimica la concentrazione di una certa sostanza $C(t)$ varia nel tempo secondo la legge

$$\begin{cases} C'(t) = C(t)(1 - C(t)) \\ C(0) = 0.3. \end{cases}$$

Determinare $C(t)$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t)$.

10. (4.6.1996). In un modello di crescita di una popolazione si trova un'equazione differenziale con ritardo del tipo

$$N'(t) = -\frac{\pi}{2T} N(t-T), \qquad\qquad T > 0.$$

Provare che le funzioni del tipo $N(t) = a\cos\left(\dfrac{\pi t}{2T}\right)$, $a \in \mathbb{R}$ sono soluzioni dell'equazione.

11. (17.9.1996). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y(x)-4} & \text{per } x \geq 0, \\ y(0) = a, \end{cases}$$

dove a è un numero reale assegnato. C'è soluzione per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$?

12. (8.10.1996). Un processo di natalità-mortalità-immigrazione è descritto dall'equazione differenziale

$$N'(t) = -\lambda N(t) + \nu, \tag{$*$}$$

dove $\lambda > 0$, $\nu > 0$.

1) verificare che fra tutte le soluzioni di $(*)$ una è costante, e calcolarla;
2) detta c la costante del punto precedente, provare che tutte le soluzioni di $(*)$ hanno limite c per $t \to +\infty$;
3) come cambiano le risposte alla precedenti domande se $\lambda = 0$?

13. (17.2.1997). Determinare le primitive della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$. Un lago di area S km^2 è infestato da una pianta acquatica che, al tempo t, misurato in giorni, occupa una superficie di $A(t)$ km^2. Sperimentalmente, si trova che la funzione $A(t)$ soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} A'(t) = \alpha A(t)(S - A(t)) & \text{per } t \geq 0, \\ A(0) = \dfrac{1}{100} S, \end{cases} \tag{$*$}$$

dove $\alpha = \alpha_0$ è dato. Si dica in quale istante t_0 la pianta ha occupato metà del lago. Per tenere sotto controllo la crescita, gli amministratori locali decidono di utilizzare un prodotto chimico il cui effetto è quello di ridurre il valore di α in $(*)$ ad $\dfrac{1}{2}\alpha_0$. Supponendo di usare questo prodotto sin dall'inizio, in quale istante t_1 la pianta ha occupato metà del lago? Suggerimento: si risolva direttamente $(*)$, sostituendo il valore di α solo alla fine.

14. (17.12.1998). Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4y'' + 4y' + y = xe^{-x} \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

Si dica se la soluzione trovata è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty)$.

15. (17.12.1998). In una certa reazione chimica due sostanze si combinano in quantità uguali. Sapendo che all'inizio sono presenti A grammi della prima sostanza e B della seconda (con $A < B$), e che la quantità di ciascuna sostanza utilizzata al tempo t, che chiameremo $y(t)$, soddisfa l'equazione differenziale

$$y'(t) = r\big(A - y(t)\big)\big(B - y(t)\big)$$

dove $r > 0$ è il tasso di reazione, determinare $y(t)$ e $\lim_{t\to+\infty} y(t)$. Come diventano le risposte se $A = B$?

16. (2.6.1999). Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2xy\log y \\ y(0) = a \end{cases}$$

e si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}^+$ si hanno soluzioni singolari. Disegnare le curve integrali.

17. (21.7.1999). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y\cos x = e^{\sin x}\log x \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

18. (22.9.1999). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y = 4x^3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

19. (13.10.1999). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2yy' = 2\sin x\cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

20. (22.2.2000). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = \sin^2 x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

21. (7.6.2000). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-3)(2x-1) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

22. (12.7.2000). In una reazione chimica la concentrazione $C(t)$ di un certo reagente soddisfa l'equazione differenziale

$$C'(t) = \alpha C(t)\bigl(1 - C(t)\bigr) \qquad \text{dove} \qquad \alpha = 0.01.$$

Sapendo che $C(0) = 0.05$ determinare $C(100)$.

23. (20.9.2000). In una stanza a temperatura ambiente di 20°C viene posto un oggetto a temperatura $T_0 = 30$°C. Sapendo che la temperatura $T(t)$ misurata in °C soddisfa l'equazione differenziale $T'(t) = -\alpha(T(t) - 20)$ (dove t è misurato in secondi, ed $\alpha = 0.005$ sec^{-1}) determinare in quale istante t_1 la temperatura dell'oggetto è di $T_1 = 20.1$°C. Rispondere alla stessa domanda supponendo che (per $T_0 \geq 20$°C) la $T(t)$ soddisfi l'equazione differenziale $T'(t) = -\beta(T(t) - 20)^2$, dove $\beta = 0.005$ sec^{-1} °C^{-1}.

Algebra Lineare

24. Indipendenza lineare. Dire se le seguenti coppie di vettori di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente dipendenti o indipendenti:

$$\begin{aligned} X_1 &= (1,2) & X_2 &= (-2,-4), \qquad (1)\\ X_1 &= (0,1) & X_2 &= (1,-5), \qquad (2)\\ X_1 &= (-1,-1) & X_2 &= (1,-2), \qquad (3) \end{aligned}$$

e in ogni caso determinare $\mathrm{Span}[X_1, X_2]$.

25. Sottospazi. Determinare $\mathrm{Span}[X_1, X_2]$ in $\mathbb{R}^3$ se $X_1 = (-1,0,2)$, $X_2 = (0,1,0)$, e se $X_1 = (-1,3,4)$, $X_2 = (0,4,-2)$.

26. Matrici inverse. Calcolare l'inversa, quando è possibile, delle matrici seguenti

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

27. Matrici inverse. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sono invertibili, e calcolarne le inverse per qualche valore di λ.

28. Autovalori ed autovettori. Determinare autovalori ed autovettori delle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$$

dove a, c e d sono numeri reali.

29. Determinanti. Calcolare $\det(A)$ e $\det(B)$, dove A e B sono

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix}$$

ed x, y e z sono arbitrari numeri reali.

30. Potenze di matrici. Calcolare A^2, A^3, B^2, B^3, C^2 e C^3 dove A, B e C sono

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e λ, μ, a, b, c sono numeri reali. Si faccia una congettura sul valore di A^n, B^n e C^n per $n \in \mathbb{N}$ e la si dimostri per induzione.

31. (17.12.1998). Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$ $X_1 = (0,-1,2)$ ed $X_2 = (-5,3,2)$, si scelga un vettore $Y \in \mathbb{R}^3$ in modo che $\{X_1, X_2, Y\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

32. (17.12.1998). Calcolare il determinante delle matrici

$$A = \begin{bmatrix} a & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & a \end{bmatrix} \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & b & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Si dica se per qualche valore di a la prima matrice è associata ad una rotazione del piano $\mathbb{R}^2$, e in questo caso determinare gli angoli corrispondenti.

33. (17.12.1998). Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$ $X_1 = (1, 2, 3)$, $X_2 = (a, -4, 0)$ e $X_3 = (1, 0, b)$, dire per quali valori di a e di b questi risultano essere linearmente indipendenti.

34. (18.3.1999). Determinare autovalori ed autovettori dell'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

35. (21.7.1999). Calcolare autovalori ed autovettori dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

36. (13.10.1999). Determinare autovalori ed autovettori dell'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 2 & -\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

37. (22.2.2000). Determinare autovalori ed autovettori dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

38. (12.7.2000). Determinare i numeri reali a, b in modo che i vettori $X = (1, -1, 0)$, $Y = (a, 0, 2b)$, $Z = (b, -3, 1)$ siano:

a) linearmente dipendenti;

b) linearmente indipendenti.

Inoltre dire per quali valori di a, $b \in \mathbb{R}$ i vettori Y, Z e $(1, 0, 0)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Analisi in piú Variabili

39. Massimi e minimi. Determinare e classificare tutti i punti stazionari delle funzioni

$$f(x, y) = x^2 - y^4 \tag{1}$$
$$f(x, y) = 2\log\bigl(2 + x^2 + y^2\bigr) - xy \tag{2}$$
$$f(x, y) = \log\bigl(2 + x^2 + y^2\bigr) - xy \tag{3}$$
$$f(x, y, z) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 2xz + z^2 \tag{4}$$
$$f(x, y, z) = 3x^2 - 3xy + 2y^2 - 2xz + z^2 \tag{5}$$
$$f(x, y) = \cos x + \cos y \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = xe^{-x^2-y^2} && (7)\\
&f(x,y) = y^2 - x^3 - x^2 && (8)\\
&f(x,y) = \log\bigl(x^2+y^2\bigr) \qquad \text{per } (x,y)\neq(0,0) && (9)\\
&f(x,y) = e^{-x^2-y^2} && (10)
\end{aligned}
$$

40. Coordinate polari. Si studi la funzione $f(x,y) = x^2+(y-1)^2$ passando a coordinate polari.

41. Metodo dei moltiplicatori. Determinare gli estremi delle funzioni assegnate sui domini indicati:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= -x\log x - y\log y && \text{su } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\} && (1)\\
f(x,y) &= x^2y^2 && \text{su } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2\leq 1\} && (2)\\
f(x,y,z) &= x+3y-z && \text{su } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon z=x^2+y^2 \text{ e } z=2x+4y\} && (3)\\
f(x,y,z) &= x+y+z && \text{su } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon xyz=1\} && (4)\\
f(x,y) &= xy && \text{su } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2\leq 1\} && (5)\\
f(x,y) &= ax+by && \text{su } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2\leq 1\}, \text{ dove } a^2+b^2\neq 0 && (6)
\end{aligned}
$$

Per continuità, nell'esercizio (1) si definisca $[x\log x]_{x=0} = 0$.

42. Serie di Fourier. Sviluppare in serie di Fourier sull'intervallo $[-\pi,\pi]$ le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$.

43. (18.3.1999). Determinare e classificare tutti i punti stazionari della funzione $f\colon D\to\mathbb{R}$ di espressione analitica $f(x,y) = (4x^2+5y^2)e^{-x^2-y^2}$, dove $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2\leq 9\}$.

44. (18.3.1999). Si vuole costruire una tenda la cui forma è un cilindro sormontato da un cono con lo stesso raggio di base ed il cui volume vale $V_0 > 0$. Si dica quali devono essere le relazioni fra raggio di base R, altezza del cilindro H ed altezza del cono a affinché sia minima la spesa per la tela di cui è fatta la tenda. Suggerimento: dopo aver scritto le relazioni fra le variabili, si prendano $R = 1$, $V_0 = \pi\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ e si considerino come variabili solo H ed a.

45. (2.6.1999). Determinare e classificare tutti i punti stazionari della funzione $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ di espressione analitica $f(x,y) = (x^2-y^2)e^{-x^2}$. Dato poi $R > 0$, determinare i punti di massimo e minimo per f ristretta al dominio $D(R) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2\leq R^2\}$.

46. (21.7.1999). Determinare e classificare tutti i punti stazionari della funzione $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ di espressione analitica $f(x,y) = x^3-3xy^2$. Dato poi $R > 0$, determinare i punti di massimo e minimo per f ristretta al dominio $D(R) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2\leq R^2\}$.

47. (22.9.1999). Studiare la funzione $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ di espressione analitica $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$. Suggerimento: si ricordi che $2\sin x\cos x = \sin 2x$.

48. (22.9.1999). Determinare i punti dell'insieme $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon y = \frac{1}{2}x^2 - 2\}$ che hanno distanza minima dall'origine. Suggerimento: calcolare il minimo della distanza al quadrato.

49. (13.10.1999). Studiare la funzione $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = (x-3)(y-4)\cdot e^{-x-2y}$. Determinare poi gli estremi di f con il vincolo $(x-3)(y-4) = 3$.

50. (22.2.2000). Studiare la funzione $f: D \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^2 + 3y^2$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\}$, determinandone i punti stazionari ed il loro tipo. Come cambia la risposta se si prende come dominio l'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\}$?

Integrali Multipli

51. Calcolare i seguenti integrali multipli, trasformandoli in integrali iterati quando possibile e passando a coordinate polari negli altri casi:

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \qquad \text{su } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1\} \tag{1}$$

$$\iint_D xye^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{su } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \in [0,1]\} \tag{2}$$

$$\iint_D e^x y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{su } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \geq 0,\ 0 \leq y^2 \leq x\} \tag{3}$$

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{su } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq R^2\} \tag{4}$$

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{su } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\} \tag{5}$$

$$\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad \text{su } D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2\} \tag{6}$$

52. Calcolare i seguenti integrali multipli, trasformandoli in integrali iterati quando possibile e passando a coordinate polari negli altri casi:

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{su } D = [0,1] \times [0,1] \tag{1}$$

$$\iint_D e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{su } D = [0,1] \times [0,1] \tag{2}$$

$$\iint_D e^{xy} y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{su } D = [0,1] \times [0,1] \tag{3}$$

$$\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{su } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \geq 0\} \tag{4}$$

$$\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{su } D = [0,1] \times [0,1] \tag{5}$$

53. (18.3.1999). Calcolare

$$\iint_D \frac{y}{1+x^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{dove} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}.$$

54. (18.3.1999). Calcolare

$$\iint_D \log(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{dove} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

55. (2.6.1999). Si calcoli il valore dell'integrale doppio

$$I(r,R)=\iint_{D(r,R)}\frac{x+y}{x^4+2x^2y^2+y^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

dove $D(r,R)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon r^2\le x^2+y^2\le R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ e $0<r<R$. Calcolare

$$\lim_{r\to 0+} I(r,1) \qquad \text{e} \qquad \lim_{R\to+\infty} I(1,R).$$

Rispondere alle stesse domande con $E(r,R)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon r^2\le x^2+y^2\le R^2,\ y\ge 0\}$ al posto di $D(r,R)$

56. (21.7.1999). Calcolare il valore dell'integrale multiplo

$$\iint_D x^2y\cos(xy^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{dove} \qquad D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2].$$

57. (22.9.1999). Calcolare

$$a_n=\iint_{D_n}\log(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{dove} \qquad D_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon \frac{1}{n^2}\le x^2+y^2\le 1\right\}$$

e determinare il valore del

$$\lim_{n\to+\infty} n(a_n+\pi).$$

58. (13.10.1999). Calcolare

$$\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{dove} \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 1\le xy\le 4,\ 1\le y\le 5\}$$

mediante il cambiamento di variabili $u=xy$, $v=y$.

59. (22.2.2000). Dato $L\in\mathbb{R}^+$ e posto $D(L)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le L\}$, calcolare

$$I(L)=\iint_{D(L)} xe^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Calcolare poi il $\displaystyle\lim_{L\to+\infty} I(L)$.

60. (12.7.2000). Sia $f\colon E(R)\to\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y)=x^3-3xy^2$, e sia $E(R)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le R^2\}$. Dire se esiste $n\in\mathbb{N}$ tale che il limite

$$L=\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R^n}\iint_{E(R)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

sia finito e diverso da 0.

Metodo dei Minimi Quadrati

61. Sulla confezione di un prodotto anticongelante per auto è riprodotta la tabella qui sotto, il cui significato è che il miscuglio di 1 l di questo prodotto ed x l d'acqua congela alla temperatura T. In altre parole, il prodotto puro congela a $-44°$C, diluito in parti uguali di acqua congela a $-30°$C, e cosí via.

Diluizione	0	1	2	3	7
Temperatura (°C)	-44	-30	-15	-10	-2

Usando opportune unità di misura, determinare un modello ragionevole ed il relativo coefficiente di correlazione per questi dati. Si osservi che in questo caso un modello lineare $T = ax + b$ è completamente fuori luogo (perché?). Si studino i modelli $T^{-1} = ax + b$ e si spieghi perché anche questo non va bene, ed il modello $\log(-T) = ax + b$, determinandone i relativi coefficienti di correlazione.

62. La tabella che segue riporta il raggio medio dell'orbita R ed il periodo di rivoluzione T dei pianeti del sistema solare (espressi rispettivamente in milioni di chilometri ed in milioni di secondi).

Pianeta	Me	Ve	Te	Ma	Gi	Sa	Ur	Ne	Pl
R	57.9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
T	7.6	19.4	31.6	59.4	374	930	2650	5200	7820

Usando opportune unità di misura, determinare la retta di regressione ed il coefficiente di correlazione per questi dati, e, mediante il cambiamento di variabili adatto, si trovi un modello non lineare del tipo $T = AR^B$. (Si confronti con la terza legge di Keplero).

63. (13.5.1999). La tabella che segue dà la popolazione degli Stati Uniti (in milioni) come risulta da censimenti effettuati negli anni indicati.

Anno	1810	1850	1890	1930	1970
Pop.	7.24	23.2	62.9	122.8	203.2

Usando opportune unità di misura, determinare la retta di regressione ed il coefficiente di correlazione per questi dati, e, mediante un cambiamento di variabili adatto, si trovi un modello non lineare. In entrambi i casi, calcolare i valori previsti dai modelli utilizzati e il numero di abitanti previsto per l'anno 2010. Dire in quale anno gli abitanti supereranno i 300 milioni, utilizzando entrambi i modelli proposti.

64. (22.9.1999). Le tariffe ferroviarie per la seconda classe in vigore nell'estate 1999 sono parzialmente riportate nella tabella che segue:

Distanza (km)	50	100	200	300	500
Costo (L.)	4300	8200	16000	23500	42000

Usando opportune unità di misura, determinare un modello ragionevole ed il relativo coefficiente di correlazione per questi dati. Calcolare il costo previsto dal modello per un viaggio di 1000 km.

65. (22.2.2000). Si vuole studiare la relazione fra concentrazione di ceneri di zolfo nell'atmosfera ed assenze degli addetti nell'industria. La tabella seguente riporta i risultati di un'indagine:

Zolfo in μg/m^3	14	26	28	34	40
Assenti per 1000 dipendenti	38	88	106	122	176

Determinare un modello ragionevole ed il relativo coefficiente di correlazione per questi dati. Calcolare il numero di assenti previsto dal modello quando la quantità di ceneri di zolfo nell'atmosfera è di 30μg/m^3.

Sistemi di Equazioni Differenziali

66. (13.5.1999). Determinare i punti critici del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - y + 1 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x^2(x+1) - y^2 \end{cases}$$

e stabilirne la natura.

67. (13.5.1999). Dato il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + 2y \end{cases}$$

determinare la natura del punto critico in $(0,0)$ e le rette che contengono orbite. Risolvere il sistema sapendo che $\big(x(0), y(0)\big) = (x_0, y_0)$. Tracciare un grafico approssimativo delle orbite, indicandone l'orientazione. Ricavare l'equazione delle orbite.

68. (2.6.1999). Determinare tutti i punti critici del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x^2 + 4x - y(y+1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = xy - 2y \end{cases}$$

e stabilirne la natura. Determinare il sistema linearizzato in $(0,0)$, la natura del punto critico in $(0,0)$ e le rette che contengono orbite. Risolvere il sistema linearizzato sapendo che $\big(x(0), y(0)\big) = (x_0, y_0)$. Tracciare un grafico approssimativo delle orbite del sistema linearizzato indicandone l'orientazione. Ricavare l'equazione delle orbite.

69. (13.10.1999). Determinare i punti critici del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (x-\pi)(2y - \sin y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y - 2\pi \end{cases}$$

e stabilirne la natura.